

REG-AOT-2223-ASM-SET 1-MATH

建議題解

多項選擇題

1. A

設 $BF = 1$ 。則 $BC = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $AB = BC \tan 30^\circ = \frac{1}{3}$ 。

$$\tan \theta = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{3}$$

2. D

設 $AD = 1$ 。則 $AM = \tan \theta$ 。

$DE = AH = \tan \beta$ 。 $AB = EF = DE \tan \alpha = \tan \beta \tan \alpha$ 。

由於 M 為 AB 的中點， $2AM = AB$ 及 $2 \tan \theta = \tan \beta \tan \alpha$

3. B

設 $BG = 1$ 。則 $FG = \frac{1}{\tan y}$ 及 $GH = \frac{FG}{\tan x} = \frac{1}{\tan x \tan y}$

$$\tan z = \frac{GH}{1} = \frac{1}{\tan x \tan y}$$

4. A

$$PQ = \sqrt{9^2 + CP^2} = \sqrt{81 + (6^2 + 8^2)} = \sqrt{181} \text{ cm}$$

$$PF = \sqrt{AF^2 + AP^2} = \sqrt{(15 + 9)^2 + (6^2 + 8^2)} = 26 \text{ cm}$$

$$FQ = \sqrt{15^2 + FH^2} = \sqrt{225 + (12^2 + 16^2)} = 25 \text{ cm}$$

$$(\sqrt{181})^2 = 26^2 + 25^2 - 2(26)(25) \cos \angle PFQ$$

$$\angle PFQ = \cos^{-1} \frac{56}{65}$$

$$\sin \angle PFQ = \frac{33}{65}$$

5. C

設 $OA = 1 \text{ m}$ 。

則 $OB = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1 \text{ m}$ 及 $OC = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m}$ 。

$$\tan \angle OCB = \frac{OB}{OC}$$

$$\angle OCB = 60^\circ$$

6. A

設 X 為對角線 BH 與 AG 的交點。

$$XA = XB = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 3$$

由於 $\triangle XAB$ 為等腰三角形， $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\left(\frac{4}{2}\right)}{XB} = \frac{2}{3}$ 。

7. A

設立方體的邊長為 2。

I. $\checkmark$ 。EF 垂直於 ABFG。故此， $\angle BFE = 90^\circ$ 。

II. $\checkmark$ 。AB 垂直於 ADEF。故此， $\angle BAE = 90^\circ$ 。

III. $\times$ 。BE = $\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$ 。EM = BM $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $EM^2 + BM^2 = 5 + 5 = 10 \neq BE^2$ 。故此， $\angle BME \neq 90^\circ$ 。

8. C

設 BC = 1。

AB = 1 tan 45° = 1 及 BG = 1 tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{AB}{AF} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

9. D

$$AX = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$XE = \sqrt{AX^2 + (2a)^2} = \sqrt{(2a)^2 + b^2 + c^2}$$

10. B

設 BG = 1。則 FG = GH = 1 × tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 BF = BH = $\frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

$$FH = \sqrt{FG^2 + GH^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$FH^2 = BF^2 + BH^2 - 2(BF)(BH) \cos \angle FBH$$

$$\angle FBH \approx 41^\circ$$

11. A

$$CM = 30 \times \frac{7}{3+7} = 21 \text{ cm 及 } MH = 30 - 21 = 9 \text{ cm}$$

$$MA = \sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2} = 29 \text{ cm 及 } MG = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

$$AG = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34 \text{ cm}$$

$$AG^2 = AM^2 + MG^2 - 2(AM)(MG) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{29}$$

12. C

$$AD = BD = \frac{3}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{6} \text{ m}$$

$$DC = 3 \tan 30^\circ = \sqrt{3} \text{ m}$$

$$AC = \sqrt{DC^2 + AD^2} = \sqrt{15} \text{ m}$$

$$3^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB) \cos \angle BAC$$

$$\angle BAC \approx 38^\circ$$

13. B

設 $AB = 1$ 。

在 $\triangle ABD$ ， $AD = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$ 及 $BD = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ 。

在 $\triangle ABC$ ， $AC = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$ 及 $BC = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$ 。

$$CD^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(1)(\sqrt{3}) \cos 150^\circ$$

$$CD = \sqrt{7}$$

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2(AD)(AC) \cos \angle CAD$$

$$\angle CAD \approx 100^\circ$$

14. C

$$BC = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\tan \theta = \frac{5}{3}$$

15. B

設 $AD = 1$ 。

$$AE = 1 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\sin \angle ACE = \frac{AE}{AC}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\angle ACE = 30^\circ$$

16. B

I. $\checkmark$ 。留意 $\triangle AHF \cong \triangle DGE$ ，可得 $\angle AHF = \angle DGE$ 。

II. $\times$ 。 $\angle AGH = 90^\circ$ 而 $\angle DGE < 90^\circ$ 。

III. $\checkmark$ 。留意 $\triangle BEG \cong \triangle DGE$ ，可得 $\angle BEG = \angle DGE$ 。

17. D

設每邊的長度為 2。

$$MC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ 及 } MN = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ 及 } CN = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}。$$

$$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{5})(2\sqrt{2}) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

18. A

$$BP = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm 及 } DP = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ cm}$$

當 $13 + 2k = 15 \rightarrow k = 1$ 時，面積為零；且當 $13 + 15 = 2k \rightarrow k = 14$ 時，面積為零。

只有選項 A 的公式滿足上述條件。

19. B

設該立方體的長度為 2。

$$MN = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$MP = DE = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$NP = \sqrt{NH^2 + HP^2} = \sqrt{1^2 + (1^2 + 2^2)} = \sqrt{6}$$

$$MN^2 = MP^2 + NP^2 - 2(MP)(NP) \cos \angle MPN$$

$$\angle MPN = 30^\circ$$

20. C

I. ✓。留意 AD 垂直於平面 $CDEH$ ，可得 $AD \perp DH$ 。

II. ✗。留意 $\angle BAE = 90^\circ$ ，可得 $\angle ABE = 180^\circ - 90^\circ - \angle BEA < 90^\circ$ 。

III. ✓。留意 CH 垂直於平面 $ABCD$ ，可得 $CH \perp AC$ 。

21. D

設 Q 為 AD 的中點。

則 $\theta = \angle PEQ$ 。

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{PQ}{EQ} \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + (2z)^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + 4z^2}} \end{aligned}$$

22. B

設 E 為 $ABCD$ 上的一點使得 VE 垂直於平面 $ABCD$ 。

所求角為 $\angle VCE$ 。

$$CE = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \text{ cm}$$

$$\cos \angle VCE = \frac{CE}{8}$$

$$\angle VCE \approx 61^\circ$$

23. C

可得 $\theta = \angle BEG$ 。

$$EG = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$BE = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{10}{\sqrt{116}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

24. D

$$PQ = CE = 40 \sin 10^\circ$$

$$DP = \frac{90}{1+2} = 30 \text{ m 及 } AP = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ m}。$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{40 \sin 10^\circ}{50} \\ &= \frac{4 \sin 10^\circ}{5} \end{aligned}$$

25. D

留意 $AE < BH < AH$ 及 $DE = GH$ 。

$$\begin{array}{ccccc} AE & < & BH & < & AH \\ \frac{DE}{AE} & > & \frac{GH}{BH} & > & \frac{GH}{AH} \\ \tan c & > & \tan a & > & \tan b \\ c & > & a & > & b \end{array}$$

26. D

留意 $DE < EG < FH$ 。

$$\text{由於 } \tan \alpha = \frac{AE}{EG}, \tan \beta = \frac{AE}{DE} \text{ 及 } \tan \gamma = \frac{BF}{FH} = \frac{AE}{FH},$$

可得 $\tan \beta > \tan \alpha > \tan \gamma$ 。

因此，可得 $\beta > \alpha > \gamma$ 。

27. B

設 H 為 CF 上的一點使得 $GH \perp CF$ 。所求之角為 $\angle GEH$ 。

$$GH = BC \times \frac{3}{2+3} = 28.8 \text{ cm}$$

$$FH = FC \times \frac{3}{5} = 8.4 \text{ cm 及 } EH = \sqrt{40^2 + 8.4^2} = \sqrt{1670.56} \text{ cm}$$

$$\text{所求之角} = \tan^{-1} \frac{28.8}{EH} \approx 35^\circ$$

28. C

設 K 為 EF 的中點。所求之角為 $\angle MNK$ 。

在 $\triangle DEF$ 中，

$$\frac{7}{\sin 50^\circ} = \frac{6}{\sin \angle DFE}$$

$$\angle DFE \approx 41.0^\circ \text{ 或 } 139^\circ \text{ (捨去)}$$

$$\angle DEF = 180^\circ - \angle DFE - 50^\circ \approx 89.0^\circ$$

$$NK^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\cos \angle DEF$$

$$NK \approx 4.57 \text{ cm}$$

在 $\triangle MNK$ 中，

$$\tan \angle MNK = \frac{5}{NK}$$

$$\angle MNK \approx 48^\circ$$

所求之角 = 48°

29. D

設 G 為 BC 的中點。

所求角為 $\angle ADG$ 。

$$AG = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$DG = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} \text{ cm}$$

$$\tan \angle ADG = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$$

$$\angle ADG \approx 26.5^\circ$$

30. C

$$BD = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ m}$$

$$32^2 = 22^2 + 20^2 - 2(22)(20)\cos \angle BDC$$

$$\angle BDC \approx 99.2^\circ$$

設 E 為 CD 的延線上的一點使得 $BE \perp CD$ 。

所求之角為 $\angle BAE$ 。

$$BE = BD \sin(180^\circ - \angle BDC) \approx 19.7 \text{ m}$$

$$\sin \angle BAE = \frac{BE}{25}$$

$$\angle BAE \approx 52^\circ$$

結構式試題

31. (a) $EI = \sqrt{90^2 + 60^2}$ 1M
 $= \sqrt{11\,700}$
 $\approx 108 \text{ cm}$ 1A
 $BE = \sqrt{90^2 + 60^2 + 60^2}$ 1M
 $= \sqrt{15\,300}$
 $\approx 124 \text{ cm}$ 1A
- (b) (i) $\angle BDC = 45^\circ$ 1A
 $\angle BDI = 45^\circ + 50^\circ = 95^\circ$ 1A
(ii) $BD = \sqrt{60^2 + 60^2}$ 1M
 $= \sqrt{7200} \text{ cm}$
 $BI^2 = BD^2 + 60^2 - 2(BD)(60) \cos \angle BDI$ 1M
 $BI \approx 108 \text{ cm}$ 1A
- (c) 所求之角為 $\angle BEI$ 。 1A
 $BI^2 = BE^2 + EI^2 - 2(BE)(EI) \cos \angle BEI$ 1M
 $\angle BEI \approx 55.1^\circ$ 1A

32. 設 K 為 DH 上的一點使得 $EK \perp DH$ 。
 所求之角為 $\angle EGK$ 。 1A
 考慮 $\triangle GHK$ 。
 $GK = \sqrt{6^2 + (4-2)^2}$ 1M
 $= \sqrt{40} \text{ cm}$
- 考慮 $\triangle EGK$ 。
 $\tan \angle EGK = \frac{5}{\sqrt{40}}$ 1M
 $\angle EGK \approx 38.3^\circ$ 1A
 所求之角為 38.3° 。

33. (a) $CA = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{233} \text{ cm}$ 1M

$$FA = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{233} \text{ cm}$$

$$CF^2 = 8^2 + 8^2 - 2(8)^2 \cos 40^\circ$$
 1M

$$CF \approx 5.47 \text{ cm}$$

$$CF^2 = CA^2 + FA^2 - 2(CA)(FA) \cos \angle CAF$$
 1M

$$\angle CAF \approx 20.7^\circ$$
 1A

(b) 設 G 為 BF 上的一點使得 $CG \perp BF$ 。所求之角為 $\angle CAG$ 。 1A

$$CG = 8 \sin 40^\circ \approx 5.14 \text{ cm}$$

$$\sin \angle CAG = \frac{CG}{\sqrt{233}}$$
 1M

$$\angle CAG \approx 19.7^\circ$$
 1A

34. (a) $EG = \sqrt{AE^2 - AG^2} = \sqrt{39} \text{ cm}$ 1M

$$FG = \sqrt{15^2 + (\sqrt{39})^2} = 2\sqrt{66} \text{ cm}$$
 1M+1A

(b) (i) 所求之角為 $\angle FGE$ 。 1A

$$\cos \angle FGE = \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{66}}$$
 1M

$$\angle FGE \approx 67.4^\circ$$
 1A

(ii) 設 N 為 DE 上的一點使得 $GN \perp DE$ 。所求之角為 $\angle GFN$ 。 1A

考慮 $\triangle EGD$ 的面積，

$$\frac{1}{2}(8)(GN) = \frac{1}{2}(\sqrt{39})(5)$$
 1M

$$GN = \frac{5\sqrt{39}}{8} \text{ cm}$$

$$\sin \angle GFN = \frac{GN}{2\sqrt{66}}$$
 1M

$$\angle GFN \approx 13.9^\circ$$
 1A