

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 8 套

名字：_____

分校：_____

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解



派發於暑期課程
S5 – S6 M2 微分
第 2 期 – 第 4 堂

1. (a) 留意 $\angle ORQ = \frac{\theta}{2}^\circ$ 。

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{RQ}{OQ} \quad 1M$$

$$= \frac{z^2 + 10}{z} \quad 1A$$

$$= z + \frac{10}{z}$$

(b) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{z}{z^2 + 10}$

$$\frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{(z^2 + 10) - z(2z)}{(z^2 + 10)^2} \cdot \frac{dz}{dt} \quad 1M$$

當 $PQ = 4$ 時， $z = 2$ 及 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2}{2^2 + 10} = \frac{1}{7}^\circ$ 。

$$\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{7} \right)^2 \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{(4 + 10) - 8}{(14)^2} \cdot (5) \quad 1M$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{10}$$

$$\angle RSO = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\angle RSO) = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{3}{20}$$

所求率為 $-\frac{3}{20} \text{ rad/s}$ 。 1A

2. (a) (i) $27\pi = \pi r^2 h$ 1M

$$h = \frac{27}{r^2}$$

$$A = 2\pi r h + \pi r^2$$

$$= 2\pi r \times \frac{27}{r^2} + \pi r^2$$
 1M

$$= \pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$$
 1

(ii) $\frac{dA}{dr} = \pi \left(-\frac{54}{r^2} + 2r \right)$

當 $\frac{dA}{dr} = 0$,

$$2r = \frac{54}{r^2}$$

$$r = 3$$
 1A

r	$0 < r < 3$	$r > 3$
$\frac{dA}{dr}$	-	+

1M

A 在 $r = 3$ 達至極小值。 1A

(b) (i) $F = \frac{1}{3}\pi(3)^2(5) - \frac{1}{3}\pi(3)^2(5) \times \left(\frac{5-D}{5} \right)^3$ 1M

$$= 15\pi \left[1 - \left(\frac{5-D}{5} \right)^3 \right]$$
 1

(ii) 設 $V \text{ cm}^3$ 為當水深是 $D \text{ cm}$ 時的水的體積。

$$\pi(3)^2 D = V + F$$
 1M

$$9\pi D = V + 15\pi \left[1 - \left(\frac{5-D}{5} \right)^3 \right]$$

$$9\pi \frac{dD}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{9\pi}{25}(5-D)^2 \frac{dD}{dt}$$
 1M

當罐內恰好滿水時， $D = \frac{27\pi}{3^2\pi} = 3$ 。

$$9\pi \frac{dD}{dt} = \pi + \frac{9\pi}{25}(5-3)^2 \frac{dD}{dt}$$
 1M

$$\frac{dD}{dt} = \frac{25}{189}$$

所求之率為 $\frac{25}{189} \text{ cm/s}$ 。 1A

3. (a) A 及 B 的坐標分別為 $(0, 8)$ 及 $(2, 8)$ 。 1A+1A

(b) P 在 C 上，故此 $q = -2p^2 + 4p + 8$ 。

$$\triangle ABP \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(2)[8 - (-2p^2 + 4p + 8)] \quad 1M$$

$$= 2p^2 - 4p \quad 1A$$

(c) $\frac{dq}{dt} = -4p\frac{dp}{dt} + 4\frac{dp}{dt}$ 1A
當 $p = 4$ ，

$$-8 = -4(4)\frac{dp}{dt} + 4\frac{dp}{dt} \quad 1M$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2}{3}$$

設 $\triangle ABP$ 的面積為 A 。

$$\frac{dA}{dt} = (4p - 4)\frac{dp}{dt} \quad 1A$$

當 $p = 4$ ，

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= (16 - 4) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$\triangle ABP$ 的面積的變率為每秒 8 平方單位。 1A

4. (a) 設 r cm 為該容器內的水面的半徑。

$$\frac{r}{h} = \tan 30^\circ$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

1M

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h$$

$$= \frac{\pi}{9}h^3$$

1

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \pi \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}h^2$$

1

(b) 當 $V = \frac{64\pi}{9}$,

$$\frac{\pi}{9}h^3 = \frac{64\pi}{9}$$

$$h = 4$$

1A

當 $h = 4$,

$$V = \frac{\pi}{9}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}(3h^2) \frac{dh}{dt}$$

$$8\pi = \frac{\pi}{9}(48) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{2}$$

1M

同時 ,

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{4\pi}{3}h\right) \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{16\pi}{3} \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 8\pi$$

所求之率為 8π cm²/s 。

1A

5. (a) $\ell^2 = (OC + OP \cos \theta)^2 + (OB + OP \sin \theta)^2$
 $= (1 + \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta)^2$ 1A+1A
 $= 2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$
 $= 3 + 2(\sin \theta + \cos \theta)$ 1
- (b) $\frac{d\ell^2}{dt} = 2(\cos \theta - \sin \theta) \frac{d\theta}{dt}$
 $2\ell \frac{d\ell}{dt} = 2(\cos \theta - \sin \theta) \frac{d\theta}{dt}$ 1M
 $\frac{d\ell}{dt} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\ell} \frac{d\theta}{dt}$ 1A
 當 $\theta = \frac{\pi}{3}$,
 $\ell^2 = 3 + 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right)$
 $\ell = \sqrt{4 + \sqrt{3}}$ 1A
 $\frac{d\ell}{dt} = \frac{\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}}{\ell} (3)$
 ≈ -0.46
 所求之率為 -0.46 cm/s 。 1A

6. (a) 該角錐的體積 = $\frac{1}{3}(12)^2(6) = 288 \text{ cm}^3$ 。

水面下的角錐的體積

$$= 288 \left[1 - \left(\frac{6-h}{6} \right)^3 \right] \quad 1\text{M}$$

$$= \frac{4}{3}[6 - (6-h)][6^2 + 6(6-h) + (6-h)^2]$$

$$= \frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h$$

$$V = 12h^2 - \left(\frac{4h^3}{3} - 24h^2 + 144h \right) \quad 1\text{M}$$

$$= 24h^2 - \frac{4}{3}h^3 \quad 1$$

(b) $\frac{dV}{dt} = 48h \frac{dh}{dt} - 4h^2 \frac{dh}{dt} \quad 1\text{M}$

代 $\frac{dh}{dt} = 1$,

$$\frac{dV}{dt} = 48h - 4h^2 > 140$$

$$-4h^2 + 48h - 140 > 0 \quad 1\text{M}$$

$$5 < h < 7 \quad 1\text{M}$$

藉考慮容器的高， $h \leq 5$ ，因此不可能使 $\frac{dV}{dt} > 140$ 。

不同意該宣稱。 1A

(c) 代 $\frac{dV}{dt} = -(12-h)(\ln h + 1)^2$,

$$-(12-h)(\ln h + 1)^2 = (48h - 4h^2) \frac{dh}{dt} \quad 1\text{M}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{(\ln h + 1)^2}{4h}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{2(\ln h + 1) \left(\frac{1}{h} \right) (h) - (\ln h + 1)^2}{-4h^2} \quad 1\text{M}$$

$$= \frac{(\ln h + 1)(\ln h - 1)}{4h^2}$$

當 $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$,

$$\ln h = \pm 1$$

$$h = e \quad \text{或} \quad \frac{1}{e}$$

h	$0 < h < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < h < e$	$e < h < 5$
$\frac{d^2h}{dt^2}$	+	-	+

1M

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=\frac{1}{e}} = 0 \quad \text{及} \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=e} = -\frac{1}{e} \quad \text{及} \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=5} = -\frac{(\ln 5 + 1)^2}{20}.$$

當水深由 5 cm 減小至 e cm，水深的變率由 $-\frac{(\ln 5 + 1)^2}{20}$ cm/s 減小至局部極小值 $-\frac{1}{e}$ cm/s。

1M

當水深由 e cm 減小至 $\frac{1}{e}$ cm，水深的變率由 $-\frac{1}{e}$ cm/s 增加至局部極大值 0 cm/s。

當水深由 $\frac{1}{e}$ cm 減小至 0 cm，水深的變率減小。

1A