

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 6 套

名字：_____

分校：_____

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解



派發於暑期課程
S5 – S6 M2 微分
第 2 期 – 第 2 堂

1. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

$$= 3x + \frac{1}{x - 1}$$

1M

斜漸近線為 $y = 3x$ 。 1A

(b) $f'(x) = 3 - \frac{1}{(x - 1)^2}$ 1A

$$f'(2) = 3 - \frac{1}{(2 - 1)^2}$$

$$= 2$$

1A

所求方程為

$$y - 7 = 2(x - 2)$$

$$2x - y + 3 = 0$$

1A

2. (a) 4 1A

(b) $y = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$

$$= x - 9 + \frac{36}{x + 4}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 9$ 。 1A

(c) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{36}{(x + 4)^2}$ 1A

$$= \frac{(x + 10)(x - 2)}{(x + 4)^2}$$

當 $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = -10$ 或 2 。 1A

x	$x < -10$	$-10 < x < -4$	$-4 < x < 2$	$x > 2$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	-	+

曲線只有一個在 $x = -10$ 的極大點。

同意該宣稱。 1A

3. (a) $g'(x) = \frac{-k(2x-6)}{(x^2-6x+21)^2}$ 1A

當 $g'(x) = 0$, $x = 3$ 。

x	$x < 3$	$x > 3$
$g'(x)$	-	+

1M

極小點為 $\left(3, \frac{k}{12}\right)$ 。

1A

(b) 沒有垂直漸近線。

橫漸近線為 $y = 0$ 。

1A

(c) $\frac{k}{12} = -2$

1M

$k = -24$

$g'(x) = \frac{48x - 144}{(x^2 - 6x + 21)^2}$

$g''(x) = \frac{(x^2 - 6x + 21)^2(48) - (48x - 144)(2)(x^2 - 6x + 21)(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 21)^4}$ 1M

$= \frac{-144(x-1)(x-5)}{(x^2 - 6x + 21)^3}$

當 $g''(x) = 0$, $x = 1$ 或 5 。

x	$x < 1$	$1 < x < 5$	$x > 5$
$g''(x)$	-	+	-

1M

拐點為 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ 及 $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$ 。

1A+1A

4. (a) $f'(x) = 2x + \frac{8}{(x-1)^2}$ 1A

$f''(x) = 2 - \frac{16}{(x-1)^3}$ 1A

(b) (i) 當 $f'(x) = 0$,

$$2x = -\frac{8}{(x-1)^2} \quad 1M$$

$$2x(x-1)^2 = -8$$

$$2x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$2(x+1)(x^2 - 3x + 4) = 0 \quad 1M$$

$$x = -1 \quad \text{或} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \quad (\text{捨去})$$

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	+	+

所求範圍為 $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$ 。 1A

(ii) 當 $f''(x) = 0$,

$$2(x-1)^3 = 16$$

$$x - 1 = 2$$

$$x = 3$$

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f''(x)$	+	-	+

所求範圍為 $x < 1$ 或 $x > 3$ 。 1A

(c) $f(-1) = 5$ 及 $f(3) = 5$ 。

相對極小點為 $(-1, 5)$, 沒有相對極大點。 1A+1A

拐點為 $(3, 5)$ 。 1A

(d) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

沒有水平漸近線或斜漸近線。

(e) (正確漸近線及點)

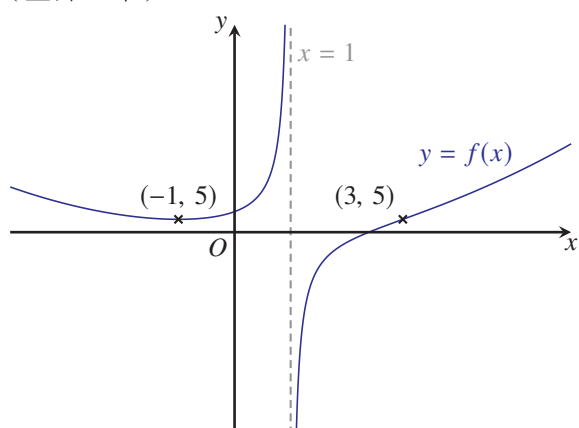
1A

(正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



5. (a) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

1A

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

1A

(b) (i) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 或 -2

1M

x	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+

所求範圍為 $x < -2$ 或 $x > 0$

1A

(ii) $-2 < x < -1$ 或 $-1 < x < 0$

1A

(iii) 對所有實數 x 值, $f''(x) \neq 0$ 。

x	$x < -1$	$x > -1$
$f''(x)$	-	+

所求範圍為 $x > -1$ 。

1A

(iv) $x < -1$

1A

(c) (i) 極大點為 $(-2, -4)$, 極小點為 $(0, 0)$

1A+1A

(ii) 沒有拐點。

1A

(d) 垂直漸近線為 $x = -1$ 。

1A

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

1M

斜漸近線為 $y = x - 1$ 。

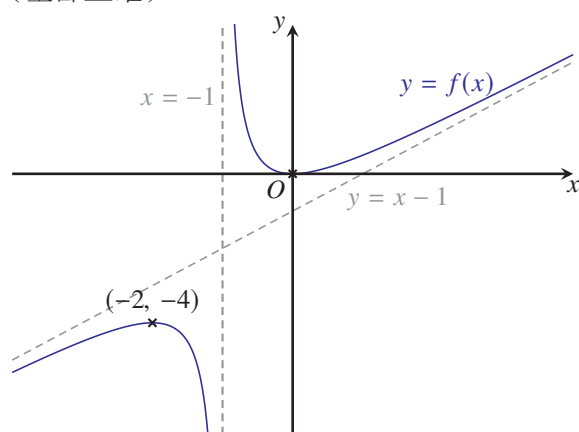
1A

(e) (正確形狀及點)

1M+1A

(全部正確)

1A



6. (a) x 截距為 0 , y 截距為 0 。 1A

(b) $f'(x) = \frac{(x^3 + 2)(4x^3) - x^4(3x^2)}{(x^3 + 2)^2}$ 1M

$= \frac{x^6 + 8x^3}{(x^3 + 2)^2}$ 1A

$f''(x) = \frac{(x^3 + 2)^2(6x^5 + 24x^2) - (x^6 + 8x^3) \times 2(x^3 + 2)(3x^2)}{(x^3 + 2)^4}$ 1M

$= \frac{6x^2(x^3 + 2)[(x^3 + 2)(x^3 + 4) - (x^6 + 8x^3)]}{(x^3 + 2)^4}$

$= \frac{12x^2(4 - x^3)}{(x^3 + 2)^3}$ 1

(c) (i) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 或 -2

x	$x < -2$	$-2 < x < -2^{\frac{1}{3}}$	$-2^{\frac{1}{3}} < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	-	-	+

極大點為 $(-2, -\frac{8}{3})$, 極小點為 $(0, 0)$ 。 1A

當 $f''(x) = 0$, $x = 0$ 或 $2^{\frac{2}{3}}$

x	$-2^{\frac{1}{3}} < x < 0$	$0 < x < 2^{\frac{2}{3}}$	$x > 2^{\frac{2}{3}}$
$f''(x)$	+	+	-

拐點為 $(2^{\frac{2}{3}}, \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3})$ 。 1A

(ii) 垂直漸近線為 $x = -2^{\frac{1}{3}}$ 。 1A

$f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 2} = x - \frac{2x}{x^3 + 2}$

斜漸近線為 $y = x$ 。 1A

(iii) (圖像的形狀)

1A

(漸近線)

1A

(全部正確)

1A

