

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 5 套

名字：_____

分校：_____

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解



派發於暑期課程
S5 – S6 M2 微分
第 2 期 – 第 1 堂

1. (a) $9 = 8a + 4b + 1$ 1M

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx$$

$$0 = 3a(4) + 2b(2)$$
 1M

求解後，可得 $a = -2$ 及 $b = 6$ 。 1A

(b) $\frac{dy}{dx} = -6x^2 + 12x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -12x + 12$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(2, 9)} = -12(2) + 12 = -12 < 0$$
 1M

因此， $(2, 9)$ 為極大點。同意該宣稱。 1A

(c) 當 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ， $x = 1$ 。

x	$x < 1$	$x > 1$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-

1M

拐點為 $(1, 5)$ 。 1A

2. (a) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x^2 + 4}$
 x 截距為 2 及 -2, y 截距為 -1。 1A

(b) $f(x) = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}$
 $f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$ 1A
 $f''(x) = \frac{16(x^2 + 4)^2 - 16x(2)(x^2 + 4)(2x)}{(x^2 + 4)^4}$
 $= \frac{-48x^2 + 64}{(x^2 + 4)^3}$ 1A

(c) (i) 當 $f'(x) = 0$, $x = 0$ 。
 當 $x = 0$, $f''(x) = 1 > 0$ 及 $f(x) = -1$ 。 1M
 極小點為 $(0, -1)$ 。 1A

(ii) 當 $f''(x) = 0$, $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。

x	$x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$x > \frac{2}{\sqrt{3}}$
$f''(x)$	-	+	-

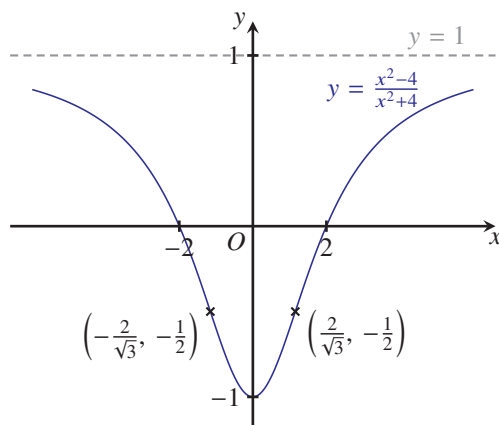
 1M

當 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{2}$ 。
 拐點為 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ 及 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ 。 1A

(d) $f(x) = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}$ 1M
 沒有垂直漸近線, 水平漸近線為 $y = 1$ 。 1A

(e) $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = f(x)$
 因此, $f(x)$ 為偶函數。 1

(f) (正確形狀) 1A
 (漸近線 + 截距 + 駐點) 1A
 (全部正確) 1A



3. (a) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。

1A

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

1M

斜漸近線為 $y = x + 2$ 。

1A

$$(b) f'(x) = 1 + \frac{3(x - 1)^2 - (3x - 2)(2)(x - 1)}{(x - 1)^4}$$

1M

$$= 1 + \frac{-3x + 1}{(x - 1)^3}$$

1A

$$1 + \frac{-3x + 1}{(x - 1)^3} = 0$$

$$(x - 1)^3 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 3$$

1A

	x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
(c)	$f'(x)$	+	+	-	+

1M

極小點為 $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ ，沒有極大點。

1A

$$(d) f''(x) = \frac{-3(x - 1)^3 - (-3x + 1)(3)(x - 1)^2}{(x - 1)^3}$$

$$= \frac{6x}{(x - 1)^4}$$

1

- (e) 當 $f''(x) = 0$ ， $x = 0$ 。

	x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
	$f''(x)$	-	+	+

1M

拐點為 $(0, 0)$ 。

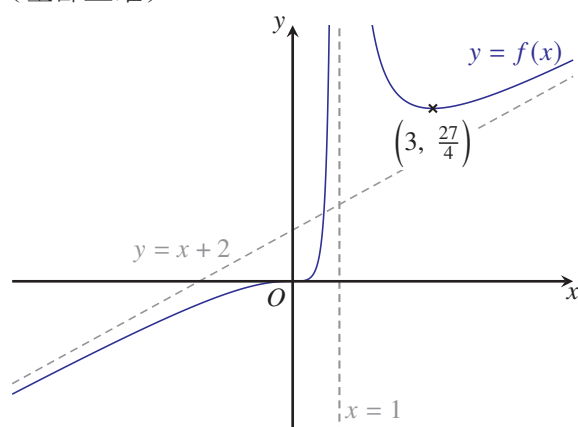
1A

- (f) (正確形狀)

1A

(全部正確)

1A



4. (a) (i) $f'(x) = \frac{(2x+k)(x-1) - (x^2+kx-2)(1)}{(x-1)^2}$ 1M

$$= \frac{x^2 - 2x + 2 - k}{(x-1)^2}$$
 1A

(ii) $f'(-1) = \frac{1+2+2-k}{(-1-1)^2} = 0$

$$k = 5$$
 1

當 $f'(x) = 0$,

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - 5}{(x-1)^2} = 0$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x = -1 \text{ 或 } 3$$

因此, $h = 3$ 。 1A

(b) (i) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$ 。故此, $f(-1) = 3$ 及 $f(3) = 11$ 。

極大點為 $(-1, 3)$ 。 1A

極小點為 $(3, 11)$ 。 1A

(ii) $f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)(2)(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - (x^2-2x-3)]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{8}{(x-1)^3}$$
 1A

對所有實數值 x , $f''(x) \neq 0$ 。

因此, 沒有拐點。 1

(c) 垂直漸近線為 $x = 1$ 。 1A

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{x - 1}$$

$$= x + 6 + \frac{4}{x - 1}$$
 1M

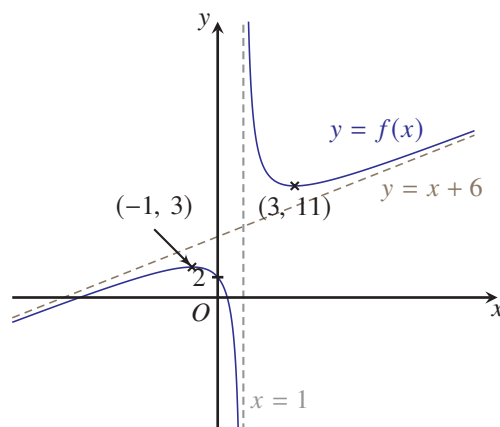
斜漸近線為 $y = x + 6$ 。 1A

(d) y 截距 = 2。 1A

(正確形狀) 1A

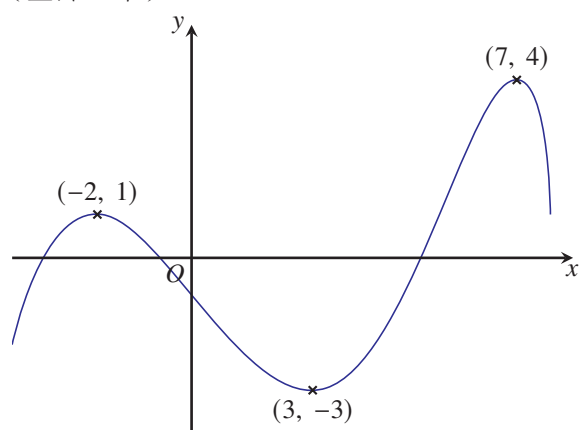
(正確漸近線及點) 1A

(全部正確) 1A



5. (正確的點)
 (正確形狀)
 (全部正確)

1A
 1A
 1A



6. (a) (i) $f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2-4x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 1M

$$= \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$
 1A

(ii) $f'(x) = \frac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ 。

當 $f'(x) = 0$, $x = \pm 1$ 。 1M

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	-	+

 1M

$f(-1) = 3$ 及 $f(1) = -1$ 。

因此, $f(x)$ 的極大值及極小值分別為 3 及 -1。 1

(b) $f''(x) = \frac{8x(x^2+1)^2 - (4x^2-4)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$ 1M

$$= \frac{8x(x^2+1) - 4x(4x^2-4)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-8x^3+24x}{(x^2+1)^3}$$
 1A

$$= \frac{-8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

當 $f''(x) = 0$, $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{3}$ 。

x	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x)$	+	-	+	-

 1M

$f(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$, $f(0) = 1$ 及 $f(\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}$

拐點為 $(-\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 、 $(0, 1)$ 及 $(\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ 。 1A

(c) 沒有垂直漸近線。 1A

$f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+1}$ 。 1M

水平漸近線為 $y = 1$ 。 1A

(d) (正確形狀) 1A

(正確漸近線及點) 1A

(全部正確) 1A

