Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　第 8 套

名字：________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 2 期 – 第 4 堂

1. (a) $VB = 5\tan 40° \approx 4.20$ cm 1M+1A

$VC = \dfrac{5}{\cos 40°} \approx 6.53$ cm 1A

(b) $AB^2 = (5\tan 40°)^2 + (5\tan 40°)^2 - 2(5\tan 40°)(5\tan 40°)\cos 25°$ 1M

$AB \approx 1.82$ cm 1A

(c) 設 M 為 VC 上的一點使得 $AM \perp VC$ 及 $BM \perp VC$。

所求角為 $\angle AMB$。 1A

$BM = 5\sin 40° \approx 3.21$ cm 1M

由於 $\triangle VAM \cong \triangle VBM$，$AM = BM \approx 3.21$ cm。 1M

在 $\triangle AMB$ 中，

$$AB^2 = (AM)^2 + (BM)^2 - 2(AM)(BM)\cos\angle AMB$$ 1M

$$\angle AMB \approx 32.8°$$ 1A

所求角為 32.8°。

(d) 設 N 為 AB 的中點。

所求角為 $\angle VCN$。 1A

$CN = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \approx 4.92$ cm 1M

$VN = VA\cos\dfrac{25°}{2} \approx 4.10$ cm 1M

在 $\triangle VCN$ 中，

$$VN^2 = CN^2 + VC^2 - 2(CN)(VC)\cos\angle VCN$$ 1M

$$\angle VCN \approx 38.8°$$ 1A

所求角為 38.8°。

2. (a) 該紙卡沿 AC 對稱。

故此，$\angle BAC = 60°$ 及 $\angle ACB = 180° - 60° - 70° = 50°$。 1A

$$\frac{AC}{\sin 70°} = \frac{10}{\sin 50°}$$ 1M

$$AC \approx 12.3 \text{ cm}$$ 1A

$BC = \dfrac{10\sin 60°}{\sin 50°} \approx 11.3$ cm 1A

(b) (i) $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$ 及 $CE^2 = \sqrt{BC^2 - BE^2}$

$AC^2 = AE^2 + CE^2$

$= BC^2 + AB^2 - 2BE^2$ 1M

$BE \approx 6.22$ cm 1A

(ii) 設 h cm 為所求距離。

$AE = \sqrt{10^2 - BE^2} \approx 7.83$ cm 及 $CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} \approx 9.4$ cm

$$\frac{1}{3} \times \frac{(AE)(DB)}{2} \times CE = \frac{1}{3} \times \frac{(AD)(AC)\sin 60°}{2} \times h$$ 1M+1M

$$h \approx 8.66$$ 1A

所求距離為 8.66 cm。

3. (a) (i) 設 $s = \dfrac{6+7+5}{2} = 9$。

$\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$ 1M

$= 6\sqrt{6}$ 1A

(ii) $\dfrac{1}{2}(6)(r) + \dfrac{1}{2}(7)(r) + \dfrac{1}{2}(5)(r) = 6\sqrt{6}$ 1M

$r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 1

(b) (i) 設 X 為 AB 與 $\triangle ABC$ 的內切圓的切點。

則 $\angle VXO = 60°$。 1A

在 $\triangle VXO$ 中，$VO = r\tan 60° = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$

$VABC$ 的體積 $= \dfrac{1}{3}(6\sqrt{6})(2\sqrt{2})$ 1M

$= 8\sqrt{3}$ 1A

(ii) 設 Y 為 BC 與內切圓的切點。

由於 $\triangle VOX \cong \triangle VOY$ （SAS）

$\angle VYO = \angle VXO = 60°$ 及 $VY = \dfrac{r}{\cos 60°} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$。

$\triangle VBC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(7)\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$ 1M

$= \dfrac{14\sqrt{6}}{3}$ 1A

(iii) 設 F 為 A 至平面 VBC 的垂足。

所求角為 $\angle ABF$。 1A

藉考慮四面體 $VABC$ 的體積，

$8\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14\sqrt{6}}{3}\right)(AF)$ 1M

$AF = \dfrac{18\sqrt{2}}{7}$

在 $\triangle ABF$ 中，

$\sin\angle ABF = \dfrac{18\sqrt{2}}{7} \div 6$

$\angle ABF \approx 37°$ 1A

4. (a) $PS^2 = 24^2 + 18^2 - 2(24)(18)\cos 50°$ 1M

$PS \approx 18.6\text{ cm}$ 1A

(b) 設 M 為 QR 的中點。所求之角為 $\angle SMP$。 1M

$SM = \sqrt{18^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = 4\sqrt{14}\text{ cm}$ 1M

$PM = \sqrt{24^2 - 10^2} = 2\sqrt{119}\text{ cm}$

$PS^2 = SM^2 + PM^2 - 2(SM)(PM)\cos\angle SMP$ 1M

$\angle SMP \approx 57.0°$ 1A

(c) $\angle PAS = \cos^{-1}\dfrac{AP^2 + AS^2 - SP^2}{2(AP)(AS)}$

利用圖的對稱性質，在當 A 在 QR 的中點時，使得 AP 及 AS 均垂直於 QR 且為最短，而此時 $\angle PAS$ 為最大。

當 A 由 Q 移動至中點 M，$\angle PAS$ 由 $50°$ 增加至 $57.0°$。 1A

當 A 由中點 M 移動至 R，$\angle PAS$ 由 $57.0°$ 減小至 $50°$。 1A

5. (a) 設 M 為 AC 的中點。

$BM = 20\sin 60° = 10\sqrt{3}\text{ cm}$

$BE = BM\sin 60° = 15\text{ cm}$ 1A

$\angle BEC = 90°$。故此，BC 為 $\triangle BCE$ 的外接圓的直徑。 1M

因此，$DE = DB = DC = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$。 1A

(b) $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$ 1M

$= \sqrt{175}\text{ cm}$

$AD = BM = 10\sqrt{3}\text{ cm}$

$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2(AD)(DE)\cos\angle ADE$ 1M

$\angle ADE \approx 49.5° \neq 90°$

不同意該宣稱。 1A