Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　第 7 套

名字：________________　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 2 期 – 第 3 堂

1. $\boxed{\text{C}}$

設每邊的長度為 2。設 K 為 BV 上的一點使得 $AK \perp BV$ 及 $CK \perp BV$。
$AK = CK = 2\sin 60° = \sqrt{3}$ 及 $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
在 $\triangle AKC$，$\angle AKC$ 為所求之角。

$$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})^2 \cos \angle AKC$$
$$\angle AKC \approx 109°$$

2. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 CD 上的一點使得 $BE \perp CD$。則 $\theta = \angle AEB$。
$CD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25\text{ cm}$。藉考慮 $\triangle BCD$ 的面積，

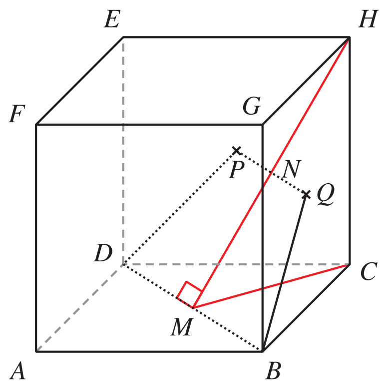
$$\frac{(25)(BE)}{2} = \frac{(24)(7)}{2}$$
$$BE = \frac{168}{25}$$

$\tan\theta = \frac{7}{BE} = \frac{25}{24}$

3. $\boxed{\text{C}}$

設立方體的邊長為 2。M 及 N 分別為 BD 及 PQ 的中點。

留意由於 D、P、H 共線，及 B、Q、H 共線。可得 M、N、H 共線。
留意 $MH \perp BD$ 及 $CM \perp BD$。
所求之角為 $\angle CMH$。
$CM = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$
$\angle CMH = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{2}} \approx 55°$



4. $\boxed{\text{D}}$

設 K 為 EG 上的一點使得 $AK \perp EG$。
所求角為 $\angle AKF$。
考慮 $\triangle EFG$ 的面積。

$$\frac{1}{2}(8)(6) = \frac{1}{2}(EG)(FK)$$
$$24 = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2}(EK)$$
$$EK = 4.8\text{ cm}$$

$\tan\theta = \frac{12}{4.8}$
$\theta \approx 68°$

5. $\boxed{\text{D}}$

設 E 為 AC 上的一點使得 $VE \perp AC$。
所求角為 $\angle VED$。
由於該錐體沿平面 VAC 對稱，
可得 $\angle VEB = \angle VED = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$。

6. $\boxed{\text{B}}$

由於 BV 垂直於平面 VAC，$\angle BVA = \angle BVC = 90^\circ$。
$AB = BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\text{ cm}$ 及 $BM = BN = 5\text{ cm}$
$\triangle BMN$ 為等邊三角形。故此，$MN = 5\text{ cm}$。
$\angle VBM = \tan^{-1}\dfrac{8}{6}$

$$VM^2 = 6^2 + 5^2 - (2)(6)(5)\cos\angle VBM$$
$$VM = 5$$

故此，$VM = VN = MN = 5\text{ cm}$，所求面積為 $\dfrac{1}{2}(5)^2\sin 60^\circ = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$。

7. $\boxed{\text{B}}$

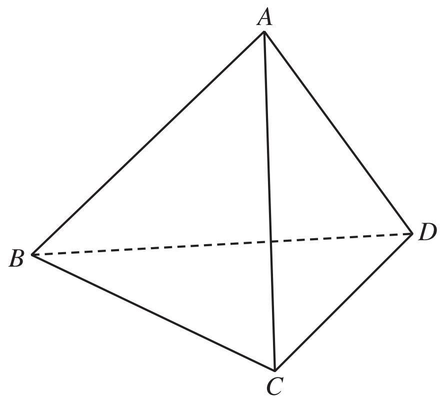
參照下圖。設 E 為 BC 的中點及每邊的邊長為 12 cm。
在 $\triangle AED$，$AE = DE = 12\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}\text{ cm}$。

$$12^2 = AE^2 + DE^2 - 2(AE)(DE)\cos\angle AED$$

$\angle AED = \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$
設 X 為 A 在平面 BCD 上的投影。則 X 為 $\triangle BCD$ 的形心且它在 DE 上。
在 $\triangle AEX$，$\angle AXE = 90^\circ$ 及

$$\begin{aligned}\text{高} &= AE\sin\angle AED \\ &= \sqrt{96}\text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{體積} &= \frac{1}{2}(12)^2\sin 60^\circ(\sqrt{96}) \times \frac{1}{3} \\ &= 144\sqrt{2}\text{ cm}^3\end{aligned}$$



8. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 VB 上的一點使得 $AK \perp VB$。可得 $CK \perp VB$。

所求之角為 $\angle AKC$。

$AC = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}\text{ cm}$

$VA = VB = VC = \sqrt{8^2 + \left(\dfrac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{136}\text{ cm}$

在 $\triangle VAB$ 中，

$$\cos\angle ABV = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)}{VB}$$
$$\angle ABV \approx 59.0^\circ$$

$AK = CK = 12\sin\angle ABV \approx 10.3\text{ cm}$

在 $\triangle AKC$ 中，

$$AC^2 = AK^2 + CK^2 - 2(AK)(CK)\cos\angle AKC$$
$$\angle AKC \approx 111^\circ$$

9. $\boxed{\text{A}}$

所求之角為 $\angle PHF$。

$PF = 12 \times \dfrac{2}{1+2} = 8\text{ cm}$ 及 $FH = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{ cm}$

$\tan\angle PHF = \dfrac{8}{10}$

$\angle PHF \approx 39^\circ$

10. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 AM 上的一點使得 $DK \perp AM$。

則 $\alpha = \angle EMD$ 及 $\beta = \angle EKD$。

I. ✓。由於 $\angle DKM = 90^\circ$，可得 $DK < DM$ 及 $\alpha < \beta$。

II. ✗。由於 $\alpha < \beta$，可得 $\cos\alpha > \cos\beta$。

III. ✓。$\angle DAM = \angle BMA = \tan^{-1}\dfrac{5}{2.5} \approx 63.4^\circ$

$DK = AD\sin\angle DAM \approx 4.47\text{ cm}$

$\tan\beta = \dfrac{DE}{DK} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

11. $\boxed{\text{A}}$

設 K 為 ME 上的一點使得 $FK \perp ME$。[而事實上，K 在 M 點的位置。]

由於 $AF \perp EM$，可得 $AK \perp ME$。所求之角為 $\angle AKF$。

由於 $MH = EH = 12\text{ cm}$，$\angle EMH = 45^\circ$ 及 $\angle FEM = 45^\circ$。

$FK = FE\sin\angle FEM = 12\sqrt{2}\text{ cm}$

所求之角 $= \tan^{-1}\dfrac{AF}{FK} = \dfrac{10}{12\sqrt{2}} \approx 31^\circ$

12. $\boxed{\text{D}}$

設 D 為 BC 上的點使得 $PD \perp BC$。
所求之角為 $\angle ADP$。

$$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{ m}$$

$$\frac{(PD)(BC)}{2} = \frac{(PB)(PC)}{2}$$

$$PD = 2.4\text{ m}$$

$$\tan\angle ADP = \frac{5}{2.4} = \frac{25}{12}$$

13. $\boxed{\text{B}}$

設 M 及 N 分別為 BC 及 AD 的中點。
所求角為 $\angle MVN$。

$$MV = NV = \sqrt{8^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}\text{ cm}$$

$$6^2 = MV^2 + NV^2 - 2(MV)(NV)\cos\angle MVN$$

$$\angle MVN \approx 46^\circ$$

14. $\boxed{\text{C}}$

$15^2 = 9^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad \angle BDC = 90^\circ$

由於 $\triangle ABD$ 為鉛垂及 CD 為水平，$AD \perp CD$。
故此，$\theta = \angle ADB = \tan^{-1}\dfrac{12}{9}$ 及 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$。

15. $\boxed{\text{C}}$

設 M 為 BC 上的一點使得 $AM \perp BC$。
所求角為 $\angle AMD$。
設每邊的邊長為 2。

$$AM = DM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

在 $\triangle ADM$ 中，

$$2^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos\angle AMD$$

$$\angle AMD \approx 71^\circ$$

16. $\boxed{\text{B}}$

所求角為 $\angle CBH$ （或 $\angle DAE$）。

$$\angle CBH = 45^\circ$$

17. $\boxed{\text{B}}$

設 $BC = 1$。

$AE = BF = 1\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \dfrac{AE}{\sin 30°} = \sqrt{3}$

$\cos \angle ACB = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

18. $\boxed{\text{B}}$

可得 $\angle VAC = 60°$。

由於 $VA = VC$，可得 $\angle VCA = \angle VAC = 60°$ 及 $\triangle VAC$ 為等邊三角形。

$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\text{ m}$

$VB = VA = VC = AC = \sqrt{2}\text{ m}$

在 $\triangle VAB$ 中，

$$1^2 = VA^2 + VB^2 - 2(VA)(VB)\cos \angle AVB$$

$$\angle AVB \approx 41°$$

19. (a) 在 $\triangle BEF$ 中，

$$FE^2 = k^2 + (rk)^2 - 2k(rk)\cos 60° \qquad \text{1M}$$
$$= k^2(1 - r + r^2) \qquad \text{1A}$$

在 $\triangle AFG$ 中，$FG \perp AC$。

$$FG^2 = (AF\sin 45°)^2 \qquad \text{1M}$$
$$= [(1-r)k]^2 \sin^2 45°$$
$$= \frac{k^2(1-r)^2}{2} \qquad \text{1A}$$

(b) $EG = \sqrt{FE^2 - FG^2}$

$$= \sqrt{k^2(1 - r + r^2) - \frac{k^2}{2}(1-r)^2} \qquad \text{1M}$$
$$= k\sqrt{\frac{1+r^2}{2}} \qquad \text{1A}$$

$EN = AE\cos 45° = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$ 1A

$\sin\theta = \dfrac{EN}{EG} = \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ 1

(c) 當 r 的值由 0 升至 1，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\theta \le 1$。 1M

因此，$45° \le \theta \le 90°$。 1A

20. (a) $VM = \sqrt{12.5^2 - \left(\dfrac{20}{2}\right)^2} = 7.5\text{ cm}$ 1M+1A

$AM = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\text{ cm}$ 1M+1A

(b) 所求角為 $\angle VMA$。 1A

在 $\triangle VMA$ 中，

$$18^2 = 7.5^2 + 24^2 - 2(7.5)(24)\cos\angle VMA \qquad \text{1M}$$
$$\angle VMA \approx 31.1° \qquad \text{1A}$$

(c) 設 VH 為該四面體的高，則 H 在 AM 上。

$$\sin\angle VMH = \frac{VH}{7.5} \qquad \text{1M}$$
$$VH \approx 3.87\text{ cm}$$

$\triangle ABC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(20)(24) = 240\text{ cm}^2$

四面體的體積 $= \dfrac{1}{3}(240)(VH)$ 1M

$\approx 310\text{ cm}^3$ 1A

21. (a) 設 O 為圓 $ABCD$ 的外心。

$\angle BAC = \angle DAC$ （已知）

$\angle BOC = 2\angle BAC$ （圓心角兩倍於圓周角）

$\angle DOC = 2\angle DAC$ （圓心角兩倍於圓周角）

$= \angle BOC$

$BC = CD$ （等角對等弦）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) (i) 設 M 的坐標為 $(a, -a)$ 使得它在 $y = -x$ 上。

$$\sqrt{(a-0)^2 + (-a-0)^2} = \sqrt{(a+200)^2 + (-a+600)^2}$$ 1M

$$2a^2 = 2a^2 - 800a + 400\,000$$

$$a = 500$$

所求方程為

$$(x-500)^2 + (y+500)^2 = (0-500)^2 + (0+500)^2$$

$$(x-500)^2 + (y+500)^2 = 500\,000$$ 1A

M 的坐標為 $(500, -500)$。 1A

(ii) $(0-500)^2 + (y+500)^2 = 500\,000$

$$(y+500)^2 = 250\,000$$

$$y = -1000 \quad 或 \quad 0 \text{（捨去）}$$

C 的坐標為 $(0, -1000)$。 1A

(c) 設 K 為 VC 上的一點使得 $BK \perp VC$。

則 $DK \perp VC$ 及所求之角為 $\angle BKD$。

$BM = CM = DM = \sqrt{(500+200)^2 + (-500+600)^2} = 500\sqrt{2}$ 1M

$BC = CD = \sqrt{200^2 + (-1000+600)^2} = 200\sqrt{5}$

$VB = VC = VD = \sqrt{MB^2 + 50^2} = 50\sqrt{201}$

$MB^2 = MC^2 + BC^2 - 2(MC)(BC)\cos\angle BCM$

$\angle BCM \approx 71.6°$

$BD = 2 \times BC \sin\angle BCM \approx 849$ 1M

$VB^2 = VC^2 + BC^2 - 2(VC)(BC)\cos\angle VCB$

$\angle VCB \approx 71.6°$

$DK = BK = BC\sin\angle VCB \approx 424$

$BD^2 = BK^2 + DK^2 - 2(BK)(DK)\cos\angle BKD$ 1M

$\angle BKD \approx 177°$ 1A