Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　$\boxed{\text{第 6 套}}$

名字：________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 2 期 – 第 2 堂

1. $\boxed{\text{B}}$

I. ✓。留意 $\triangle AHF \cong \triangle DGE$，可得 $\angle AHF = \angle DGE$。

II. ✗。$\angle AGH = 90°$ 而 $\angle DGE < 90°$。

III. ✓。留意 $\triangle BEG \cong \triangle DGE$，可得 $\angle BEG = \angle DGE$。

2. $\boxed{\text{B}}$

A. 所求角為 $\angle EBF$。

B. 所求角為 $\angle ENF$。

C. 設 Q 為 $ABGF$ 上的一點使得 PQ 垂直於 $ABGF$。
所求角為 $\angle PFQ$，亦相等於 $\angle FPE$。

D. 設 K 為 BG 的中點。
所求角為 $\angle MNK$，亦相等於 $\angle CAB$。

藉簡單觀察，可得 $\angle ENF$ 為其中最大的角。
答案為 B。

3. $\boxed{\text{D}}$

設 Q 為 AD 的中點。
則 $\theta = \angle PEQ$。

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{PQ}{EQ}\\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2+(2z)^2}}\\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2+4z^2}}\end{aligned}$$

4. $\boxed{\text{B}}$

設 $AB = 1$。
在 $\triangle ABD$，$AD = \dfrac{1}{\sin 30°} = 2$ 及 $BD = \dfrac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$。
在 $\triangle ABC$，$AC = \dfrac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$ 及 $BC = \dfrac{1}{\tan 45°} = 1$。

$$CD^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(1)(\sqrt{3})\cos 150°$$
$$CD = \sqrt{7}$$
$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2(AD)(AC)\cos\angle CAD$$
$$\angle CAD \approx 100°$$

5. $\boxed{\text{C}}$

設 N 為 GH 的中點。
所求角為 MFN。

$$MN = 24\text{ cm}$$
$$FN = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}\text{ cm}$$
$$\tan\angle MFN = \frac{24}{\sqrt{89}}$$
$$\angle MFN \approx 69^\circ$$

6. $\boxed{\text{C}}$

A. $\tan\angle ACE = \dfrac{AE}{CE}$

B. $\tan\angle AQE = \dfrac{AE}{EQ}$

C. $\tan\angle ADE = \dfrac{AE}{DE}$

D. $\tan\angle PCR = \dfrac{PR}{CR} = \dfrac{AE}{CR}$

由於 $DE < EQ = RC < CE$，可得 $\tan\angle ADE$ 為其中的最大。
因此，$\angle ADE$ 為其中最大的角。
答案為 C。

7. $\boxed{\text{B}}$

由於 $VA = VB$，可得 $\angle VAB = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ 及所有側面為等邊三角形。
所求之角為 $\angle VAM$，其中 M 為 V 在 $ABCD$ 的投影。
設 $AB = 2$。則 $VA = 2$ 及 $AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

所求之角 $= \angle VAM = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

8. $\boxed{\text{D}}$

$PQ = CE = 40\sin 10^\circ$
$DP = \dfrac{90}{1+2} = 30\text{ m}$ 及 $AP = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{ m}$。

$$\sin\theta = \frac{40\sin 10^\circ}{50} = \frac{4\sin 10^\circ}{5}$$

9. $\boxed{\text{C}}$

可得 $\theta = \angle BEG$。

$EG = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{cm}$

$BE = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}\,\text{cm}$

$$\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{116}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

10. $\boxed{\text{B}}$

所求角為 $\angle ACF$。

$AC = \dfrac{AD}{\sin 60^\circ} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$

$CD = \dfrac{AD}{\tan 60^\circ} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$

$AF = DE = CD\sin 30^\circ = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}\,\text{cm}$

$\sin\angle ACF = \dfrac{AF}{AC}$

$\angle ACF \approx 14^\circ$

11. $\boxed{\text{D}}$

留意 $DE < EG < FH$。

由於 $\tan\alpha = \dfrac{AE}{EG}$、$\tan\beta = \dfrac{AE}{DE}$ 及 $\tan\gamma = \dfrac{BF}{FH} = \dfrac{AE}{FH}$，

可得 $\tan\beta > \tan\alpha > \tan\gamma$。

因此，可得 $\beta > \alpha > \gamma$。

12. $\boxed{\text{A}}$

A. AC 與 $BCHG$ 的交角為 $\angle ACB$。

B. DH 與 $BCHG$ 的交角為 $\angle DHC$。

C. DG 與 $BCHG$ 的交角為 $\angle DGC$。

D. 設 Y 為 GH 的中點。
XB 與 $BCHG$ 的交角為 $\angle XBY$。

藉簡單觀察，可得 $\angle ACB$ 為其中最大的角。

答案為 A。

13. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。留意 AD 垂直於平面 $CDEH$，可得 $AD \perp DH$。

II. ✗。留意 $\angle BAE = 90^\circ$，可得 $\angle ABE = 180^\circ - 90^\circ - \angle BEA < 90^\circ$。

III. ✓。留意 CH 垂直於平面 $ABCD$，可得 $CH \perp AC$。

14. $\boxed{\text{C}}$

設 K 為 EF 的中點。所求之角為 $\angle MNK$。
在 $\triangle DEF$ 中，

$$\frac{7}{\sin 50^\circ} = \frac{6}{\sin \angle DFE}$$
$$\angle DFE \approx 41.0^\circ \quad 或 \quad 139^\circ （捨去）$$

$\angle DEF = 180^\circ - \angle DFE - 50^\circ \approx 89.0^\circ$

$$NK^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\cos \angle DEF$$
$$NK \approx 4.57\text{ cm}$$

在 $\triangle MNK$ 中，

$$\tan \angle MNK = \frac{5}{NK}$$
$$\angle MNK \approx 48^\circ$$

所求之角 $= 48^\circ$

15. $\boxed{\text{D}}$

設 G 為 BC 的中點。
所求角為 $\angle ADG$。
$AG = 6\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$
$DG = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}\text{ cm}$
$\tan \angle ADG = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$
$\angle ADG \approx 26.5^\circ$

16. $\boxed{\text{B}}$

所求角為 $\angle YXH$。
設 $CH = 2\text{ cm}$。
可得 $YH = \dfrac{2}{2} = 1\text{ cm}$ 及 $XH = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\text{ cm}$。
$\tan \angle YXH = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
$\angle YXH \approx 24^\circ$

17. $\boxed{\text{B}}$

設 H 為 CF 上的一點使得 $GH \perp CF$。所求之角為 $\angle GEH$。
$GH = BC \times \dfrac{3}{2+3} = 28.8\text{ cm}$
$FH = FC \times \dfrac{3}{5} = 8.4\text{ cm}$ 及 $EH = \sqrt{40^2 + 8.4^2} = \sqrt{1670.56}\text{ cm}$
所求之角 $= \tan^{-1}\dfrac{28.8}{EH} \approx 35^\circ$

18. $\boxed{\text{A}}$

設立方體的邊長為 2。

I. ✓。EF 垂直於 $ABFG$。故此，$\angle BFE = 90°$。

II. ✓。AB 垂直於 $ADEF$。故此，$\angle BAE = 90°$。

III. ✗。$BE = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$。$EM = BM\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
$EM^2 + BM^2 = 5 + 5 = 10 \neq BE^2$。故此，$\angle BME \neq 90°$。

19. $\boxed{\text{C}}$

$BD = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\text{ m}$

$$32^2 = 22^2 + 20^2 - 2(22)(20)\cos\angle BDC$$
$$\angle BDC \approx 99.2°$$

設 E 為 CD 的延線上的一點使得 $BE \perp CD$。
所求之角為 $\angle BAE$。
$BE = BD\sin(180° - \angle BDC) \approx 19.7\text{ m}$

$$\sin\angle BAE = \frac{BE}{25}$$
$$\angle BAE \approx 52°$$

20. $\boxed{\text{B}}$

設 E 為 $ABCD$ 上的一點使得 VE 垂直於平面 $ABCD$。
所求角為 $\angle VCE$。

$CE = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}\text{ cm}$

$\cos\angle VCE = \frac{CE}{8}$

$\angle VCE \approx 61°$

21. (a) $BC^2 = 30^2 + 30^2 - 2(30)(30)\cos 40°$ 1M

$BC \approx 20.5\text{ cm}$ 1A

(b) 由於 $\triangle ABC$ 為等邊三角形，$\triangle ABC$ 的外心與形心重合。

$r = \dfrac{2}{3} \times BC \sin 60°$ 1M

$\approx 11.8\text{ cm}$ 1A

(c) 所求之角 $= \cos^{-1} \dfrac{r}{30}$ 1M

$\approx 66.7°$ 1A

22. (a) 設 R 為 GH 上的一點使得 $RS \perp GH$。

所求角為 $\angle RAS$。 1A

$AD = \dfrac{30}{\sin 30°} = 60\text{ m}$ 1M

$AS = \sqrt{60^2 + 10^2} = 10\sqrt{37}\text{ m}$ 1M

$\sin \angle RAS = \dfrac{30}{10\sqrt{37}}$ 1M

$\angle RAS \approx 29.6°$ 1A

(b) DA 與平面 $ABHG$ 的交角為 $\angle DAG = 30°$。 1A

CA 與平面 $ABHG$ 的交角為 $\angle CAH$。 1A

$AC = \sqrt{60^2 + 20^2} = 20\sqrt{10}\text{ m}$

$\sin \angle CAH = \dfrac{30}{20\sqrt{10}}$ 1M

$\angle CAH \approx 28.3°$

兩角的平均值 $= \dfrac{30° + \angle CAH}{2} \approx 29.2° \neq \angle RAS$

不同意該宣稱。 1A

23. (a) $BF = 200\cos 40° \approx 153\text{ m}$ 1M

$DE = CF = BF\sin 35° \approx 87.9\text{ m}$

$\sin \angle EBD = \dfrac{DE}{200}$ 1M

$\angle EBD \approx 26.1°$

BE 的傾角為 $26.1°$。 1A

(b) 考慮 $\triangle ETX$，$\angle ETX = 180° - 90° - 70° = 20°$。

$\angle TXE = 70° - \angle EBD \approx 43.9°$ 1A

$\dfrac{EX}{\sin 20°} = \dfrac{60}{\sin \angle TXE}$ 1M

$EX \approx 29.6\text{ m}$ 1A

$BX = 200 - EX \approx 170\text{ m}$ 1A

24. (a) (i) $CD^2 = 25^2 + 6^2 - 2(25)(6)\cos 57°$ 1M

$CD \approx 22.3$ cm 1A

(ii) $\dfrac{\sin \angle BAC}{25} = \dfrac{\sin 57°}{28}$ 1M

$\angle BAC \approx 48.5°$ 或 $132°$（捨去） 1A

(iii) $\triangle ABC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2}(28)(25)\sin(180° - 57° - \angle BAC)$ 1M

$\approx 337\text{ cm}^2$ 1A

(iv) $CE = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ cm 1A

$AE = \sqrt{28^2 - 7^2} = \sqrt{735}$ cm

$AB^2 = 28^2 + 25^2 - 2(28)(25)\cos \angle ACB$

$AB \approx 32.2$ cm

設 $s = \dfrac{AB + AE + BE}{2}$。

$\triangle ABE$ 的面積 $= \sqrt{s(s - AB)(s - AE)(s - BE)}$

$\approx 318\text{ cm}^2$

設 h cm 為從 E 至水平地面的最短距離。

$\dfrac{h}{3}(\triangle ABC$ 的面積$) = \dfrac{1}{3}(\triangle ABE$ 的面積$)(CE)$ 1M

$h \approx 6.60$ 1A

所求距離為 6.60 cm。

(b) $DE = \sqrt{CD^2 - 7^2} \approx 21.2$ cm

設 d cm 為 E 至 CD 的垂直距離。

$\dfrac{d(CD)}{2} = \dfrac{(CE)(DE)}{2}$ 1M

$d = \dfrac{(CE)(DE)}{CD}$

$\approx 6.65 \neq 6.60$

故此，由 E 至 CD 的垂直距離與由 E 至水平地面的最短距離不相等。

因此，不同意該宣稱。 1A