Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S4 – S5 Core　功課　第 8 套

名字：______________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S4 – S5 Core
第 2 期 – 第 4 堂

1. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + cy - 45 = 0 \end{cases}$ 。

c 的值	交點數目	Δ
2	0	−

所求範圍不包含 2，且 2 不是其界線值。
答案為 B。

2. $\boxed{\text{C}}$

考慮方程組

$$\begin{cases} x - y + 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x + cy - 223 = 0 \end{cases}$$

代 $y = x + 13$ 至圓方程可得二次方程。
該二次方程的判別式需為正值 (兩相異實根) $\Rightarrow$ 選項 A 或 C
當 $c = 0$ 時，利用計算機程式，得出兩個交點 $\Rightarrow$ 所求的範圍包含 0。
$\Rightarrow$ 答案為 C。

3. $\boxed{\text{B}}$

PR（方程 $x = 3$）為鉛垂線且為圓的切線。
考慮圓的圓心及半徑。

A. ✗。圓心 $\left(9, \frac{9}{2}\right)$，半徑 $= \sqrt{9^2 + \left(\frac{81}{4}\right)^2 - 59} = 6.5$。
圓心與 $x = 3$ 的距離為 $6 \neq 6.5$。

B. ✓。圓心 $(5, 4)$，半徑 $= \sqrt{5^2 + 4^2 - 37} = 2$。
圓心與 $x = 3$ 的距離為 2。

C. ✗。圓心 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$，半徑 $= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 - 37}$，不是實數。

D. ✗。圓心 $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$，半徑 $= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 59}$，不是實數。

4. $\boxed{\text{A}}$

$$(1)^2 + y^2 - 8(1) + 4y - 5 = 0$$
$$y^2 + 4y - 12 = 0$$
$$y = -6 \quad \text{或} \quad 2$$

A 的坐標為 $(1,\ -6)$。

圓心 G 的坐標為 $(4,\ -2)$。

$$AG \text{ 的斜率} = \frac{-2 + 6}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

$$L_1 \text{ 的斜率} = -\frac{3}{4}$$

L_1 的方程為

$$y + 6 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$
$$3x + 4y + 21 = 0$$

5. $\boxed{\text{A}}$

圓心 G 的坐標為 $(-4,\ 1)$。

$$GP \text{ 的斜率} = \frac{1 + 1}{-4 + 2} = -1$$

切線斜率 $= 1$

所求方程為

$$y + 1 = 1(x + 2)$$
$$x - y + 1 = 0$$

6. $\boxed{\text{B}}$

$$x^2 + (x - 1)^2 - 4x + 4(x - 1) + c = 0$$
$$2x^2 + (-2 - 4 + 4)x + (1 - 4 + c) = 0$$
$$2x^2 - 2x + (c - 3) = 0$$
$$\Delta = 2^2 - 4(2)(c - 3) < 0$$
$$-8c + 28 < 0$$
$$c > \frac{7}{2}$$

7. $\boxed{\text{A}}$

$$x^2 + (x-1)^2 - 2x + 4(x-1) + k = 0$$
$$2x^2 + (-2-2+4)x + (1-4+k) = 0$$
$$2x^2 + (k-3) = 0$$
$$\Delta = 0^2 - 4(2)(k-3) \geq 0$$
$$24 - 8k \geq 0$$
$$k \leq 3$$

k 的最大值為 3。

8. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - kx + 6y - 10 = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
2	2	+

所求的範圍不包含 2，且 2 不是該範圍的界線值。
答案為 B。

9. $\boxed{\text{B}}$

圓心 G 的坐標為 $(-1,\ -2)$。
GP 的斜率 $= \dfrac{1+2}{-3+1} = -\dfrac{3}{2}$
切線斜率 $= \dfrac{2}{3}$
所求方程為

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x+3)$$
$$2x - 3y + 9 = 0$$

10. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
−7	1	0
0	2	+

所求範圍有 −7 作為界線值，且不包含 0。
答案為 D。

11. $\boxed{\text{C}}$

設內切的半徑為 r。

考慮 $\triangle OAB$ 的面積。

$$\frac{(OA)r}{2}+\frac{(OB)r}{2}+\frac{(AB)r}{2}=\frac{(12)(5)}{2}$$

$$\frac{12r}{2}+\frac{5r}{2}+\frac{\sqrt{12^2+5^2}r}{2}=30$$

$$r=2$$

內切圓的圓心的坐標為 $(2,\ 2)$。

所求方程為 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$。

12. $\boxed{\text{B}}$

利用計算機程式。

A. MATH ERROR

B. $(-0.354,\ 8.65)$ 及 $(-5.65,\ 3.35)$

C. MATH ERROR

D. MATH ERROR

答案為 B。留意「兩部分」不需要相等。

13. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} mx-y-1=0 \\ x^2+y^2-16x-2y+31=0 \end{cases}$。

當 $m=\frac{5}{3}$ 及當 $m=-\frac{3}{5}$ 時，方程組有重根。

因此，$m=\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$。

14. $\boxed{\text{A}}$

$$x^2+(-2x-1)^2-6x-2(-2x-1)+k=0$$

$$5x^2+2x+(k+3)=0$$

$$\Delta=2^2-4(5)(k+3)<0$$

$$-20k-56<0$$

$$k>-\frac{14}{5}$$

15. $\boxed{\text{D}}$

圓心 G 的坐標為 $(-h,\ -k)$。

AG 的斜率 $=\frac{b+k}{a+h}$

$$m\times\frac{b+k}{a+h}=-1$$

$$m=-\frac{h+a}{k+b}$$

16. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - y + m = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0 \end{cases}$ 。

m 的值	交點數目	Δ
-9	0	$-$

所求範圍不包含 $m = -9$ 且 -9 不是所求範圍的界線值。
答案為 D。

17. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 3x + 4y + k = 0 \\ x^2 + y^4 - \dfrac{9}{4} = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
$-\dfrac{15}{2}$	1	0
0	2	+

所求範圍有 $-\dfrac{15}{2}$ 作為界線值（不等於），且包含 0。
答案為 A。

18. $\boxed{\text{D}}$

$$0^2 + y^2 + 6(0) - 2y - 3 = 0$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0$$
$$y = 3 \quad \text{或} \quad -1$$

圓心 G 的坐標為 $(-3,\ 1)$。
由於 A、B、G 共線，AG 的斜率同為正數。
B 的坐標為 $(0,\ 3)$。
設 A 的坐標為 $(a,\ b)$。

$$\frac{a+0}{2} = -3 \quad \text{及} \quad \frac{b+3}{2} = 1$$
$$a = -6 \qquad\qquad b = -1$$

A 的坐標為 $(-6,\ -1)$。

19. $\boxed{\text{D}}$

A. ✗。利用計算機程式，方程組 $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0 \end{cases}$ 沒有實解。

B. ✗。$x + y + 9 = 0$ 不通過 $(3,\ 6)$。

C. ✗。與 A 同樣原因。

D. ✓。

20. $\boxed{\text{A}}$

代 $(3,\ b)$ 至 L 的方程。

$$(3) - 4(b) - 11 = 0$$
$$b = -2$$

代 $(-1,\ -3)$ 及 $(3,\ -2)$ 至 C 的方程。

$$\begin{cases} 1 + 9 - a - 15 + c = 0 \\ 9 + 4 + 3a - 10 + c = 0 \end{cases}$$

求解後，可得 $a = -2$ 及 $c = 3$。

答案為 A。

21. $\boxed{\text{A}}$

$$x^2 + (kx - 2)^2 + 4kx + 4 = 0$$
$$(1 + k^2)x^2 + (-4k + 4k)x + 4 + 4 = 0$$
$$(1 + k^2)x^2 + 8 = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4(1 + k^2)(8)$$
$$= -32k^2 - 32$$
$$< 0$$

L 與 S 不相交。

22. $\boxed{\text{D}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + k = 0 \end{cases}$。

k 的值	交點數目	Δ
0	2	+

所求範圍不包含 $k = 0$，且 0 不是所求範圍的界線值。

答案為 D。

23. $\boxed{\text{D}}$

$$(x+3)^2+(3-1)^2=5$$
$$(x+3)^2=1$$
$$x=-4 \quad 或 \quad -2$$
$$所求面積=\frac{(-2+4)(3)}{2}$$
$$=3$$

24. $\boxed{\text{D}}$

$$x^2+0^2-8x-6(0)+12=0$$
$$x^2-8x+12=0$$
$$x=2 \quad \text{or} \quad 6$$

圓心 G 的坐標為 $(4,\ 3)$。

L 通過圓心 G 及 A，且有正斜率。

A 的坐標為 $(2,\ 0)$。

L 的斜率 $=\dfrac{3-0}{4-2}=\dfrac{3}{2}$

所求方程為

$$y-3=\frac{3}{2}(x-4)$$
$$y=\frac{3}{2}x-3$$

25. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(-2,\ 4)$。半徑的斜率 $=\dfrac{4-3}{-2+7}=\dfrac{1}{5}$

切線斜率 $=-5$

切線的方程為

$$y-3=-5(x+7)$$
$$5x+y+32=0$$

26. $\boxed{\text{C}}$

$$x^2+k^2-2x-2k+1=0$$
$$x^2-2x+(k^2-2k+1)=0$$
$$\Delta=2^2-4(1)(k^2-2k+1)=0$$
$$-4k^2+8k=0$$
$$k=0 \quad \text{or} \quad 2$$

27. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} mx - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0 \end{cases}$ 。

A. 1 個交點 → 切線

B. 沒有交點

C. 沒有交點

D. 沒有交點

28. $\boxed{\text{C}}$

$$x^2 + 16^2 - 2kx - 2k(16) + k^2 = 0$$

$$x^2 - 2kx + (k^2 - 32k + 256) = 0$$

$$\Delta = (2k)^2 - 4(1)(k^2 - 32k + 256) = 0$$

$$128k - 1024 = 0$$

$$k = 8$$

29. $\boxed{\text{C}}$

$$0^2 + y^2 + 8(0) - 10y + 16 = 0 \quad \text{及} \quad x^2 + 0^2 + 8x - 10(0) + 16 = 0$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \qquad x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$y = 2 \text{ 或 } 8 \qquad x = -4$$

所求面積 $= \dfrac{(8-2)(4)}{2}$

$= 12$

30. $\boxed{\text{A}}$

利用計算機程式解方程組 $\begin{cases} 3x + 4y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0 \end{cases}$ 。

k 的值	交點數目	Δ
-71	1	0
0	0	–

所求範圍有 -71 作為界線值，且不包含 0。

答案為 A。

31. (a) $(x + 2)(x - 4) + (y + 8)(y - 2) = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 24 = 0$ 1M

圓心的坐標為 $(1, -3)$，半徑 $= \sqrt{1^2 + 3^2 + 24} = \sqrt{34}$ 1A+1A

(b) $\sqrt{(-2 - 1)^2 + (k + 3)^2} < \sqrt{34}$ 1M

$k^2 + 6k - 16 < 0$

$-8 < k < 2$ 1A

(c) L 的方程為

$y - k = 1(x + 2)$ 1M

$y = x + 2 + k$

$x^2 + (x + 2 + k)^2 - 2x + 6(x + 2 + k) - 24 = 0$ 1M

$(1 + 1)x^2 + [2(2 + k) - 2 + 6]x + [(2 + k)^2 + 12 + 6k - 24] = 0$

$2x^2 + (2k + 8)x + (k^2 + 10k - 8) = 0$

中點的 x 坐標 $= \frac{1}{2}\left(-\frac{2k + 8}{2}\right) = -\frac{k + 4}{2}$ 1M

當 $x = -\frac{k + 4}{2}$ 時，$y = -\frac{k + 4}{2} + 2 + k = \frac{k}{2}$。

中點的坐標為 $\left(-\frac{k + 4}{2}, \frac{k}{2}\right)$。 1A

32. (a) $Q(8, 6)$ 1A

C 的坐標 $= \left(\frac{0 + 8}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right)$ 1M

$= (4, 3)$ 1A

(b) RC 的斜率 $= \frac{6 - 3}{0 - 4} = -\frac{3}{4}$

圓在 R 的切線的斜率 $= \frac{4}{3}$ 1M

圓在 P 的切線的方程為

$\frac{y - 0}{x - 8} = \frac{4}{3}$ 1M

$3y = 4x - 32$ 1A

圓在 R 的切線的方程為 $y = \frac{4}{3}x + 6$。 1A

(c) OC 的斜率 $= \frac{3 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}$

圓在 O 的切線的斜率 $= -\frac{4}{3}$ 1M

兩切線的斜率之積 $= -\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{16}{9} \neq -1$ 1M

故此，圓在 R 及在 O 的切線不互相垂直。

因此，該形成的四邊形不是長方形。該宣稱不正確。 1A

33. (a) $\angle ABC = \angle AOC$

$\angle ADC = 2\angle ABC = 2\angle AOC$ 1M

$\angle OCD = \angle OAD = 90^\circ$ 1M

在四邊形 $OACD$ 中，

$$\angle AOC + 2 \times 90^\circ + \angle ADC = 360^\circ \quad \text{1M}$$
$$3\angle AOC = 180^\circ$$
$$\angle AOC = 60^\circ \quad \text{1A}$$

(b) (i) $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = 30^\circ$ 1M

在 $\triangle AOD$ 中，

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{OD} = \frac{BD}{OD}$$
$$OD = 2BD \quad \text{1M}$$

故此，D 的坐標為 $\left(\frac{0 + 2 \times 9}{3}, \frac{0 + 2 \times 9}{3}\right) = (6, 6)$。 1A

所求方程為

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = (9 - 6)^2 + (9 - 6)^2$$
$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 18 \quad \text{1A}$$

(ii) 設 $y = mx$ 為從 O 的切線的方程。

$$(x - 6)^2 + (mx - 6)^2 = 18 \quad \text{1M}$$
$$(m^2 + 1)x^2 - 12(m + 1)x + 54 = 0$$

由於 $y = mx$ 為切線，

$$\Delta = [-12(m + 1)]^2 - 4(m^2 + 1)(54) = 0 \quad \text{1M}$$
$$-72m^2 + 288m - 72 = 0 \quad \text{1A}$$
$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

OA 及 OC 的方程分別為 $y = (2 - \sqrt{3})x$ 及 $y = (2 + \sqrt{3})x$。 1A+1A

34. (a) $CE \perp AB$ （垂心性質）

$BD \perp AC$ （垂心性質）

$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 （同弓形內的圓周角的逆定理）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2},\ \dfrac{-6-6}{2} \right) = (4,\ -6)$ 1A

圓的方程為

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2$ 1M

$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100$ 1A

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \tan^{-1} \dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8^\circ \neq 90^\circ$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

35. (a) $AB^2 = 9^2 + 18^2 = 405$

$AC^2 = 13^2 + 16^2 = 425$

$BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

故此，$AB^2 + BC^2 = AC^2$。 1M

因此，$\angle ABC = 90°$。

$\triangle ABC$ 為一直角三角形。 1A

(b) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-9+4}{2}, \dfrac{-8+8}{2}\right) = \left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$ 1A

Ω 的方程為

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(0 + \frac{5}{2}\right)^2 + 10^2$$ 1M

$$x^2 + y^2 + 5x - 100 = 0$$ 1A

(c) (i) D 的坐標為 $(10, 0)$。 1A

$$(10)^2 + 0^2 + 5(10) - 100 = 50 \neq 0$$

故此，D 不在通過 A、B 及 C 的圓上。 1M

因此，$ABCD$ 不是圓內接四邊形。 1A

(ii) 設 L 的斜率為 m。

L 的方程為 $y = m(x - 10)$。 1M

代 L 至 Ω，

$$x^2 + (mx - 10m)^2 + 5x - 100 = 0$$ 1M

$$(1 + m^2)x^2 + (-20m^2 + 5)x + (100m^2 - 100) = 0$$

由於 L 為切線，$\Delta = 0$。

$$(20m^2 - 5)^2 - 4(1 + m^2)(100m^2 - 100) = 0$$ 1M

$$-200m^2 + 425 = 0$$

$$m = \pm\frac{\sqrt{34}}{4}$$ 1A

L 的方程為 $y = \dfrac{\sqrt{34}}{4}(x - 10)$ 及 $y = -\dfrac{\sqrt{34}}{4}(x - 10)$。