Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S4 – S5 Core　功課　第 7 套

名字：____________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S4 – S5 Core
第 2 期 – 第 3 堂

1. $\boxed{\text{B}}$

圓心的坐標為 $(1,\ 0)$。

連接 A 的半徑的斜率 $= \dfrac{0-1}{1-0}$

$= -1$

切線的斜率 $= 1$

所求方程為 $y = x + 1$。

2. $\boxed{\text{A}}$

設 L 的方程為 $y = mx$ 使得 L 通過原點。

$$x^2 + (mx)^2 - x + 5(mx) + 2 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (5m - 1)x + 2 = 0$$

$$\Delta = (5m - 1)^2 - 4(1 + m^2)(2) = 0$$
$$17m^2 - 10m - 7 = 0$$
$$m = 1 \quad 或 \quad -\frac{7}{17}$$

可得 $m = 1$。

$$(1 + 1^2)x^2 + (5 - 1)x + 2 = 0$$
$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$x = -1$$

當 $x = -1$，$y = (1)(-1) = -1$。

P 的坐標為 $(-1,\ -1)$。

3. $\boxed{\text{D}}$

$$(0)^2 + y^2 + 4(0) - 4 = 0$$
$$y^2 - 4 = 0$$
$$y = 2 \quad 或 \quad -2\text{（捨去）}$$
$$(0) - (2) + k = 0$$
$$k = 2$$
$$x^2 + (x + 2)^2 + 4x - 4 = 0$$
$$2x^2 + 8x = 0$$
$$x = 0 \quad 或 \quad -4$$

當 $x = -4$，$y = (-4) + 2 = -2$。

B 的坐標為 $(-4,\ -2)$。

4. $\boxed{\text{A}}$

$$x^2 + (2x + 1)^2 - x + 2(2x + 1) = 0$$
$$5x^2 + 7x + 3 = 0$$

$\Delta = 7^2 - 4(5)(3) = -11 < 0$

所求數目為 0。

5. $\boxed{\text{B}}$

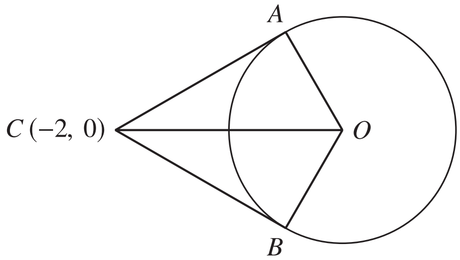
由於 $\angle AOB = 90°$，AB 為該圓的一直徑。
圓心的坐標為 $\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$。

$$連接原點的半徑的斜率 = \frac{-3-0}{-\frac{5}{2}-0} = \frac{6}{5}$$

切線的斜率 $= -\frac{5}{6}$
所求方程為 $5x + 6y = 0$。

6. $\boxed{\text{D}}$

圓的半徑 $= 1$；$\angle AOC = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60°$
$\angle AOB = 120°$ 及 $AB = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos 120°} = \sqrt{3}$



7. $\boxed{\text{C}}$

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (0+1)^2 &= 5\\ (x-1)^2 &= 4\\ x-1 &= \pm 2\\ x &= 3 \quad 或 \quad -1\end{aligned}$$

$AB = 3 - (-1) = 4$
圓的半徑 $= 2\sqrt{5}$
$BC = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (4)^2} = 2$
所求面積 $= (4)(2) = 8$

8. $\boxed{\text{D}}$

$$\begin{aligned}x^2 + (x+4)^2 - 4x - 16 &= 0\\ 2x^2 + 4x &= 0\\ x &= 0 \quad 或 \quad -2\end{aligned}$$

當 $x = 0$，$y = 0 + 4 = 4$；當 $x = -2$，$y = -2 + 4 = 2$。
所求坐標為 $(0, 4)$ 及 $(-2, 2)$。

9. (a) L_2 的斜率 $= \frac{3}{4}$ 1M

L_1 的斜率 $= -\frac{4}{3}$

圓心 C 的坐標為 $(5, 0)$。 1M

L_1 的方程為

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 5)$$ 1M

$$4x + 3y - 20 = 0$$ 1A

(b)

$$x^2 + \left(-\frac{4x}{3} + \frac{20}{3}\right)^2 - 10x = 0$$ 1M

$$\left(1 + \frac{16}{9}\right)x^2 + \left(-\frac{160}{9} - 10\right)x + \frac{400}{9} = 0$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{250}{9}x + \frac{400}{9} = 0$$ 1M

$$x = 8 \quad \text{或} \quad 2$$

當 $x = 8$，$y = -\frac{4}{3}(8) + \frac{20}{3} = -4$；當 $x = 2$，$y = 4$。

交點的坐標為 $(8, -4)$ 及 $(2, 4)$。 1A

10. (a) $x^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - 12x - 8\left(\frac{2x}{3}\right) + 39 = 0$ 1M

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right)x^2 + \left(-12 - \frac{16}{3}\right)x + 39 = 0$$

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{52}{3}x + 39 = 0$$ 1M

$$x = 3 \quad \text{或} \quad 9$$

當 $x = 3$，$y = 2$；當 $x = 9$，$y = 6$。

P 及 Q 的坐標分別為 $(3, 2)$ 及 $(9, 6)$。 1A+1A

(b) (i) 將 C_1 的圓心記為 G。則 G 的坐標為 $(6, 4)$。 1M

GP 的斜率 $= \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3}$

公切線的斜率為 $-\frac{3}{2}$。 1M

公切線的方程為

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 3)$$

$$3x + 2y - 13 = 0$$ 1A

(ii) L 的斜率為 $\frac{2}{3}$，且垂直於 C_1 在 P 的切線。

故此，L 通過 C_2 的圓心。

C_2 的圓心為 OP 的中點，坐標為 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$。

C_2 的方程為

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - 1)^2$$ 1M

$$x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$$ 1A

11. (a) 圓心的坐標為 $(-4,\ 0)$。

CA 的斜率 $= \dfrac{0+4}{-4+7} = \dfrac{4}{3}$。在 A 的切線的斜率 $= -\dfrac{3}{4}$。 1M

在 A 的切線的方程為

$$y + 4 = -\frac{3}{4}(x+7)$$

$$3x + 4y + 37 = 0$$ 1A

由於 CB 鉛垂，B 的切線為水平。 1M

B 的切線的方程為 $y = 5$。 1A

(b) $3x + 4(5) + 37 = 0$ 1M

$$x = -19$$

D 的坐標為 $(-19,\ 5)$。 1A

(c) $\angle CAD = 90°$ *（切線 ⊥ 半徑）*

$\angle CBD = 90°$ *（切線 ⊥ 半徑））*

$\angle CAD + \angle CBD = 90° + 90° = 180°$ 1M

因此，A、B、C、D 共圓。 *（對角互補）* 1A

12. (a) $x^2 + (1-x)^2 - 2x + 6(1-x) + 1 = 0$ 1M

$(1+1)x^2 + (-2-2-6)x + (1+6+1) = 0$

$2x^2 - 10x + 8 = 0$ 1M

$x = 1$ 或 4

當 $x = 1$，$y = 1 - 1 = 0$；當 $x = 4$，$y = -3$。

A 及 B 的坐標分別為 $(1,\ 0)$ 及 $(4,\ -3)$。 1A+1A

(b) 最小的圓以 AB 為直徑。

圓心的坐標 $= \left(\dfrac{1+4}{2}, \dfrac{0-3}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$ 1M

該圓的方程為

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{3}{2}\right)^2$$ 1M

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$ 1A

13. (a) $x^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 4x - 4\left(\frac{1}{3}x\right) = 0$ 1M

$$\frac{10}{9}x^2 - \frac{16}{3}x = 0$$

$$x = 0 \quad 或 \quad \frac{24}{5}$$

當 $x = \frac{24}{5}$，$y = \frac{8}{5}$。P 的坐標為 $\left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$。 1A

$OP = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ 1A

(b) 設 Q 的坐標為 (a, b)。由於 $PQ = OP$，

$\left(a - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{8}{5}\right)^2 = \left(\frac{8\sqrt{10}}{5}\right)^2$ 1M

$$a^2 + b^2 - \frac{48}{5}a - \frac{16}{5}b = 0$$

由於 (a, b) 在該圓上，$a^2 + b^2 - 4a - 4b = 0$。

$\left(-\frac{48}{5}a - \frac{16}{5}b\right) - (-4a - 4b) = 0$ 1M

$$-\frac{28}{5}a + \frac{4b}{5} = 0$$

$$b = 7a$$

代 $b = 7a$ 至 $a^2 + b^2 - 4a - 4b = 0$，

$$a^2 + (7a)^2 - 4a - 4(7a) = 0$$

$$50a^2 - 32a = 0$$

$$a = \frac{16}{25} \quad 或 \quad 0$$

當 $a = \frac{16}{25}$，$b = \frac{112}{25}$。Q 的坐標為 $\left(\frac{16}{25}, \frac{112}{25}\right)$。 1A

該圓的圓心的坐標為 $(2, 2)$。

CQ 的斜率 $= \frac{\frac{112}{25} - 2}{\frac{16}{25} - 2} = -\frac{31}{17}$ 1M

該圓在 Q 的切線的斜率 $= \frac{17}{31}$ 1M

該圓在 Q 的切線的方程為

$y - \frac{112}{25} = \frac{17}{31}\left(x - \frac{16}{25}\right)$ 1M

$$775y - 3472 = 425x - 272$$

$17x - 31y + 128 = 0$ 1A

14. (a) 代 $(-2,\ 1)$，

$$左式 = (-2)^2 + 1^2 - 10(1) + 5 \qquad \text{1M}$$
$$= 0 = 右式$$

因此，$P\,(-2,\ 1)$ 在該圓上。 1

(b) 圓心 C 的坐標為 $(0,\ 5)$。

CP 的斜率 $= \dfrac{5-1}{0+2} = 2$

故此，切線 L 的斜率 $= -\dfrac{1}{2}$ 1M

該切線的方程為

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x+2)$$
$$x + 2y = 0 \qquad \text{1A}$$

(c) 設 L_1 與 S 的切點為 A。

若 L_1 平行於 L，則 C 為 AP 的中點。

A 的坐標為 $(2,\ 9)$。 1M

L_1 的方程為

$$y - 9 = -\frac{1}{2}(x-2) \qquad \text{1M}$$
$$x + 2y - 20 = 0 \qquad \text{1A}$$

15. (a)

$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4} + \frac{17}{2}\right)^2 - 6x - 16 = 0 \qquad \text{1M}$$
$$\left(1 + \frac{9}{16}\right)x^2 + \left(-\frac{51}{4} - 6\right)x + \left(\frac{289}{4} - 16\right) = 0$$
$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{75x}{4} + \frac{225}{4} = 0$$
$$x = 6 \qquad \text{1M}$$

因此，L 為 C 的一切線。 1

(b) 利用 (a)，當 $x = 6$，$y = -\dfrac{3(6)}{4} + \dfrac{17}{2} = 4$。

A 的坐標為 $(6,\ 4)$。 1A

(c) 設 G 為圓 C 的圓心。G 的坐標為 $(3,\ 0)$。 1M

設 $B\,(r,\ s)$ 為 L_1 與 C 的切點。

則 AGB 為一直徑及 G 為 AB 的中點。

$$\frac{6+r}{2} = 3 \qquad\qquad \frac{4+s}{2} = 0 \qquad \text{1M}$$
$$r = 0 \qquad\qquad s = -4$$

該切點的坐標為 $(0,\ -4)$。 1A

16. (a) 設通過 R 的直線的斜率為 m，其方程為 $y = mx - 3$。

$$x^2 + (mx-3)^2 + 8x + 6(mx-3) + 17 = 0$$
$$(1+m^2)x^2 + (-6m + 8 + 6m)x + (9 - 18 + 17) = 0$$
$$(1+m^2)x^2 + 8x + 8 = 0$$

由於 $y = mx - 3$ 為該圓的切線，

$$8^2 - 4(1+m^2)(8) = 0$$ 1M
$$m^2 = 1$$
$$m = \pm 1$$

L_1 及 L_2 的方程分別為 $y = -x - 3$ 及 $y = x - 3$。 1A+1A

(b) 利用 (a)，

$$(1+1)x^2 + 8x + 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x = -2$$

代 $x = -2$ 至 L_1，$y = -1$。P 的坐標為 $(-2,\ -1)$。 1A
代 $x = -2$ 至 L_2，$y = -5$。Q 的坐標為 $(-2,\ -5)$。 1A

(c) $\triangle PQR$ 的面積 $= \frac{1}{2}(-1+5)(2)$ 1M
$= 4$ 1A

17. (a) (i) 由於 G 為 $\triangle OAB$ 的形心，P 及 Q 分別為 AB 及 OA 的中點。

$PQ // OB$ 及 $QP = \frac{1}{2}OB$ （中點定理）

在 $\triangle PGQ$ 及 $\triangle OGB$ 中，

$\angle PGQ = \angle OGB$ （對頂角）

$\angle PQG = \angle OBG$ （錯角，$QP // OB$）

$\angle QPG = \angle BOG$ （錯角，$QP // OB$）

$\triangle PGQ \sim \triangle OGB$ （AAA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(ii) $\triangle PGQ \sim \triangle OGB$ （已證明）

$$\frac{GQ}{BG} = \frac{QP}{OB} \quad \text{（全等 }\triangle\text{ 的對應邊）}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}OB}{OB} \quad \text{（已證明）}$$

$$= \frac{1}{2}$$

因此，$BG : GQ = 2 : 1$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 設 (m, n) 及 $(b, 0)$ 分別為 Q 及 B 的坐標。

由於 $BG : GQ = 2 : 1$，

$$\frac{n-1}{1-0} = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{3}{2}$$

由於 Q 在 OA 上，當 $n = \frac{3}{2}$，$m = 2 \times \frac{3}{2} = 3$。

Q 的坐標為 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$。 1M

$$\frac{b-5}{5-3} = \frac{2}{1}$$

$$b = 9$$

B 的坐標為 $(9, 0)$。 1A

(ii) 設 $S(p, q)$ 為 $\triangle OAB$ 的外心。

由於 S 在 OB 的垂直平分線上，$p = \frac{9}{2}$。 1M

由於 $OA \perp SQ$，

$$\frac{1}{2} \times \frac{q - \frac{3}{2}}{\frac{9}{2} - 3} = -1$$ 1M+1M

$$q = -\frac{3}{2}$$

外心的坐標為 $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$。 1A