Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 必修部分

S4 – S5 Core 功課 $\boxed{\text{第 6 套}}$

名字：________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S4 – S5 Core
第 2 期 – 第 2 堂

1. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} = 0$

I. ✗。圓心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

II. ✗。半徑 $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \neq 2$

III. ✓。半徑 $= \frac{1}{4}$ = 圓心的 y 坐標。
故此，該圓與 x 軸相切。

2. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 + 2x + 4y + \frac{4}{3} = 0$

I. ✗。圓心的 x 坐標 $= -1$

II. ✓。$0^2 + 0^2 + 0 + 0 + \frac{4}{3} > 0$。原點在 C 外。

III. ✗。半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 - \frac{4}{3}} \neq 1$

3. $\boxed{\text{C}}$

圓心的坐標為 $(-5, 5)$。
所求方程為

$$(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$$

4. $\boxed{\text{B}}$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

I. ✓。

II. ✗。半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3} = \sqrt{8} \neq 3$

III. ✓。$2^2 + 1^2 - 2(2) + 4(1) - 3 = 2$
> 0
$(2, 1)$ 在圓以外。

5. $\boxed{\text{C}}$

圓的半徑為 3。
所求方程為 $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$。

6. $\boxed{\text{D}}$

$\frac{h}{-2} = 2$ 及 $\frac{k}{-2} = -1$

$h = -4$ $\quad$ $k = 2$

7. $\boxed{\text{C}}$

圓心的坐標為 $(-3,\ -1)$。
半徑 $= \sqrt{16} = 4$

8. $\boxed{\text{B}}$

半徑 $= \sqrt{2^2 + 1^2 + 4} = 3$
所求面積 $= 3^2\pi = 9\pi$ 平方單位

9. $\boxed{\text{A}}$

$$1^2 + 4^2 + k > 0$$
$$k > -17$$

10. $\boxed{\text{D}}$

直徑通過圓心 $(4,\ 3)$。
$$\frac{-5-3}{k-4} = -4$$
$$k = 6$$

11. $\boxed{\text{A}}$

半徑 $= \sqrt{2^2 + 3^2 + 12} = 5$
圓周 $= 2(5)\pi = 10\pi$

12. $\boxed{\text{C}}$

該圓通過點 $(5 \pm 12,\ 0)$，即 $(-7,\ 0)$ 及 $(17,\ 0)$。
圓心 $(5,\ -7) \Rightarrow$ 該圓為 $x^2 + y^2 - 10x + 14y + F = 0$ 的形式。
代 $(-7,\ 0)$，$F = -119$。

13. $\boxed{\text{B}}$

連接 $(0,\ 8)$ 與 $(-6,\ 0)$ 的線段為直徑。
圓心的坐標為 $(-3,\ 4)$。
所求方程為 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ （通過原點）。

14. $\boxed{\text{A}}$

A. ✓。
B. ✗。圓心 $(1,\ -7)$ 不在 L 上。
C. ✗。圓心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$ 不在 L 上。
D. ✗。$(3,\ 4)$ 不在圓上。

15. $\boxed{\text{A}}$

所求方程為

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = (3+2)^2 + (5-4)^2$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

16. $\boxed{\text{D}}$

A. ✗。圓心 $\left(-\dfrac{5}{2},\ 5\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

B. ✗。圓心 $\left(\dfrac{19}{2},\ -4\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

C. ✗。圓心 $\left(\dfrac{17}{2},\ -\dfrac{19}{2}\right)$ 不在直線 $x+y-1=0$ 上。

D. ✓。圓心 $\left(-\dfrac{17}{2},\ \dfrac{19}{2}\right)$ 在直線 $x+y-1=0$ 上，
且 $(0,\ 0)$ 及 $(3,\ 4)$ 均滿足該方程。

17. $\boxed{\text{D}}$

設半徑為 r。
圓心的坐標為 $(r,\ -r)$。
圓心在 L 上。

$$\begin{aligned}(r)+2(-r)+4&=0\\ r&=4\end{aligned}$$

所求方程為

$$\begin{aligned}(x-4)^2+(y+4)^2&=4^2\\ x^2+y^2-8x+8y+16&=0\end{aligned}$$

18. $\boxed{\text{A}}$

由於 $\angle AOB=90°$，其中 O 為原點。
該圓的圓心為 AB 的中點。
圓心的坐標為 $\left(\dfrac{-3}{2},\ 2\right)$。
所求方程為

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2&=\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+(0-2)^2\\ x^2+y^2+3x-4y&=0\end{aligned}$$

19. $\boxed{\text{A}}$

圓的半徑為 2。設 C_3 的圓心為 $(h,\ k)$。
留意由三個圓心形成等邊三角形。
藉考慮連接 C_1 與 C_3 的圓心的線段，

$$h-2=(2+2)\cos 60° \quad 及 \quad k-2=(2+2)\sin 60°$$
$$h=4 \qquad\qquad k=2+2\sqrt{3}$$

只有選項 A 的圓心在 $\left(4,\ 2+2\sqrt{3}\right)$。

20. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(-10,\ 12)$。圓方程為 $x^2 + y^2 + 20x - 24y + F = 0$ 的形式，其中 F 為一常數。
AB 的中點的坐標為 $(-10,\ 0)$。
因此，A 及 B 的 x 坐標為 $-10 \pm 16 = 6$ 或 -26。

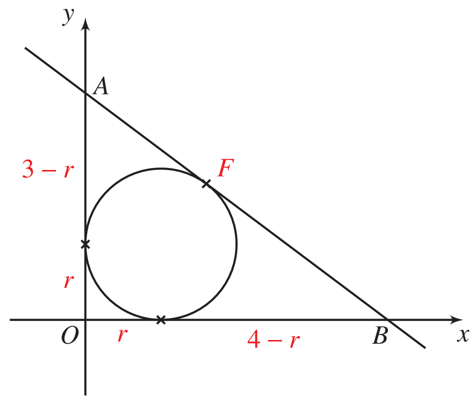
$$(6)^2 + (0)^2 + 20(6) - 24(0) + F = 0$$
$$F = -156$$

C：$x^2 + y^2 + 20x - 24y - 156 = 0$

21. $\boxed{\text{C}}$

設 F 為 AB 與該圓的切線。設 r 為半徑。

$AF = 3 - r$ 及 $BF = 4 - r$
$(3 - r) + (4 - r) = \sqrt{3^2 + 4^2}$
$r = 1$
圓的方程為 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$。



22. $\boxed{\text{C}}$

圓心的 y 坐標 $= 2$
圓心的 x 坐標 $= \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$
半徑 $= \dfrac{5}{2}$
所求方程為

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 - 5x - 4y + 4 = 0$$

23. $\boxed{\text{B}}$

設 C 的坐標為 $(h,\ 0)$，其中 $h < 0$。
由於 $y = 3$ 為該圓的一切線，圓的半徑為 3。
由於 $x = 1$ 為該圓的一切線，可得

$$1 - h = 3$$
$$h = -2$$

所求方程為 $(x + 2)^2 + y^2 = 9$。

24. $\boxed{\text{A}}$

圓心為 AB 的中點。
圓心的坐標為 $(-1,\ -1)$.
所求方程為

$$(x+1)^2+(y+1)^2=(2+1)^2+(3+1)^2$$
$$x^2+y^2+2x+2y-23=0$$

25. $\boxed{\text{B}}$

圓心的 y 坐標 $=\dfrac{2\sqrt{3}+8\sqrt{3}}{2}$
$=5\sqrt{3}$
圓心為 $\triangle CAB$ 的形心/垂心/外心/內心。
（備註：當三角形為等邊時，四心在同一位置。）

A. ✗。圓心 $\left(-5,\ 5\sqrt{3}\right)$ 不應在直線 AB 上。
B. ✓。
C. ✗。圓心的 y 坐標 $=-5\sqrt{3}\neq 5\sqrt{3}$
D. ✗。圓心的 y 坐標 $=-5\sqrt{3}\neq 5\sqrt{3}$

26. $\boxed{\text{B}}$

半徑 $=3$
所求方程為

$$(x+5)^2+(y+3)^2=3^2$$
$$x^2+y^2+10x+6y+25=0$$

27. $\boxed{\text{D}}$

兩點的距離 $=\sqrt{(0+8)^2+(0+6)^2}=10=2(5)$
連接兩點的線段因此為所求的圓的一直徑。
圓心的坐標為 $(-4,\ -3)$。
所求方程為

$$(x+4)^2+(y+3)^2=5^2$$
$$x^2+y^2+8x+6y=0$$

28. $\boxed{\text{B}}$

圓心的 x 坐標 $=\dfrac{1+5}{2}=3$
圓心的 y 坐標 $=\dfrac{1+(-3)}{2}=-1$
半徑 $=5-3=2$
所求方程為 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$。

29. $\boxed{\text{A}}$

圓的半徑為 2。設 C_3 的圓心為 $(h,\ k)$。
留意由三個圓心形成等邊三角形。
藉考慮連接 C_1 與 C_3 的圓心的線段，

$$h - 2 = (2 + 2)\cos 60^\circ \quad \text{及} \quad k - 2 = (2 + 2)\sin 60^\circ$$
$$h = 4 \qquad\qquad k = 2 + 2\sqrt{3}$$

只有選項 A 的圓心在 $\left(4,\ 2 + 2\sqrt{3}\right)$。

30. $\boxed{\text{A}}$

圓心的 x 坐標 $= \dfrac{2 + 8}{2} = 5$
半徑 $= 5$ 及圓心的 y 坐標 $= 4$
所求方程為

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$$

31. (a) $y^2 - 12y + 32 = 0$

$y = 4$ 或 8

A 的坐標為 $(0, 4)$。 1A

(b) $c = 4$ 1A

P 的坐標為 $(6, 6)$。 1M

AP 的斜率 $= \dfrac{6-4}{6-0} = \dfrac{1}{3}$

L 的斜率 $= m = -3$ 1A

(c) 設 B 的 x 坐標為 b。

由於 B 在 $y = -3x + 4$ 上，B 的坐標為 $(b, -3b + 4)$。

$$\sqrt{b^2 + (-3b + 4 - 4)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (4-6)^2}$$ 1M

$$b^2 + 9b^2 = 40$$

$b = 2$ 或 -2（捨去）

B 的坐標為 $(2, -2)$。 1A

C_2 的方程為

$$(x + 10)^2 + (y + 6)^2 = (2 + 10)^2 + (-2 + 6)^2$$ 1M

$$(x + 10)^2 + (y + 6)^2 = 160$$ 1A

32. (a) L_2 的斜率 $= \dfrac{-6-6}{0+6} = -2$

L_1 的斜率 $= \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ 1M

L_1 的方程為

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x + 6)$$ 1M

$$x - 2y + 18 = 0$$

A 及 B 的坐標分別為 $(-18, 0)$ 及 $(0, 9)$。 1A+1A

(b) (i) $\angle APQ = 90^\circ$ *（已知）*

$\angle AOQ = 90^\circ$

因此，A、P、O、Q 共圓。 *（同弓形內的圓周角的逆定理）*

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(ii) 由於 $\angle AOQ = 90^\circ$，AQ 為圓的直徑。

圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-18+0}{2}, \dfrac{0-6}{2}\right) = (-9, -3)$ 1M

圓的方程為

$$(x + 9)^2 + (y + 3)^2 = (0 + 9)^2 + (0 + 3)^2$$ 1M

$$(x + 9)^2 + (y + 3)^2 = 90$$ 1A

33. (a) 設圓的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 D、E 及 F 均為常數。 1A

$$\begin{cases} 1 + 4 + D + 2E + F = 0 & (1) \\ 9 + 3E + F = 0 & (2) \\ 16 + 4D + F = 0 & (3) \end{cases}$$ 1M

考慮 (2) − (1) 及 (3) − (2)。

$$\begin{cases} -D + E = -4 \\ 4D - 3E = -7 \end{cases}$$ 1M

求解後，$D = -19$ 及 $E = -23$。 1A

當 $D = -19$ 及 $E = -23$ 時，$F = -9 - 3(-23) = 60$。

圓的方程為 $x^2 + y^2 - 19x - 23y + 60 = 0$。 1A

(b) 圓心 $= \left(\frac{19}{2}, \frac{23}{2}\right)$ 1A

圓的半徑 $= \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{23}{2}\right)^2 - 60} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$ 1A

(c) 若圓上的兩點能成直徑，它們的中點必需為圓心。

AB 的中點 $= \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 1M

BC 的中點 $= \left(2, \frac{3}{2}\right)$

CA 的中點 $= \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

以上皆不是圓的圓心。

因此，該宣稱不正確。 1A

34. (a) (i) PQ 的斜率 $= \frac{13 - 1}{1 + 5} = 2$

L 的斜率 $= -\frac{1}{2}$ 1M

PQ 的中點的坐標為 $(-2, 7)$。

L 的方程為

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$ 1M

$$x + 2y - 12 = 0$$ 1A

(ii) G 的 x 坐標 $= 12 - 2k$ 1M

C 的方程為 $x^2 + y^2 - 2(12 - 2k)x - 2ky + F = 0$ 的形式，其中 F 為一常數。

$$12^2 + 10^2 - (24 - 4k)(12) - 2k(10) + F = 0$$ 1M

$$F = -28k + 44$$

C 的方程為 $x^2 + y^2 + (4k - 24)x - 2ky - 28k + 44 = 0$。 1

(b) 當 $GR \perp L$ 時，C 的面積最小。

$$\frac{10 - k}{12 - (-2k + 12)} \times \frac{-1}{2} = -1$$ 1M

$$-10 + k = -4k$$

$$k = 2$$ 1A