Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S4 – S5 Core　功課　$\boxed{\text{第 5 套}}$

名字：________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S4 – S5 Core
第 2 期 – 第 1 堂

1. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。C_1 的半徑 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$；C_2 的半徑 $= \sqrt{25} = 5$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$

III. ✗。$(0,\ 0)$ 不滿足 C_2 的方程。C_2 不通過原點。

2. $\boxed{\text{D}}$

$C: x^2 + y^2 - 3x + y - \dfrac{13}{2} = 0$

I. ✗。圓心 $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

II. ✓。$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$

半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{2}} = 3 < AB$

III. ✓。AB 的斜率 $= \dfrac{1+2}{2-1} = 3$

AG 的斜率 $= \dfrac{-2+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}} = 3$，其中 G 為圓心

因此，三點共線。

3. $\boxed{\text{D}}$

$$3^2 + 2^2 - 4(3) + 8(-2) + k = 0$$
$$k = 15$$

圓心 $(2,\ -4)$ 及半徑 $= \sqrt{2^2 + 4^2 - 15} = \sqrt{5}$

面積 $= (\sqrt{5})^2\pi = 5\pi$ 平方單位

4. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(-8,\ -5)$ 在第三象限。

答案為 C。

5. $\boxed{\text{D}}$

圓心 $(p,\ q)$ 在第四象限。故此，$p > 0$ 及 $q < 0$。

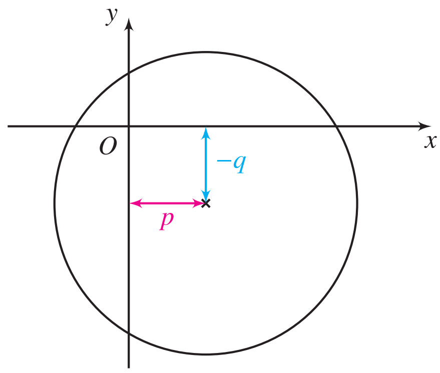
I. ✓。

II. ✓。$p - r < 0$

（長度 p 較半徑短）

III. ✓。$\sqrt{p^2 + q^2} < r$

（原點與圓心的距離小於半徑）



6. $\boxed{\text{A}}$

$x^2 + y^2 - 9x + 8y - \frac{1}{2} = 0$

I. ✓。$0 + y^2 - 0 + 8y - \frac{1}{2} = 0$

$y \approx 0.0620$ 或 -8.06

圓與 y 軸有兩個交點。

II. ✗。圓心的坐標為 $\left(\frac{9}{2}, -4\right)$。

III. ✗。代 $(0, 0)$，左式 $= -\frac{1}{2} < 0$。圓心在圓內。

7. $\boxed{\text{A}}$

C：$x^2 + y^2 - 6x - 2y + \frac{5}{3} = 0$

A. ✓。圓心 $(3, 1)$ 及半徑 $= \sqrt{3^2 + 1^2 - \frac{5}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} < 3$。

該圓在 y 軸的右方。

B. ✗。代 $(0, 0)$ 至 C 的方程的左式，左式 $= 0 + 5 = 5 > 0$。

$(0, 0)$ 在 C 外。

C. ✗。圓心在 $(3, 1)$。

D. ✗。面積 $= \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 \pi = \frac{25\pi}{3} < \frac{25\pi}{2}$。

8. $\boxed{\text{D}}$

I. ✓。$G_1\ (-2, 6)$，$G_2\ (2, 4)$。OG_2 的斜率 $\times$ G_1G_2 的斜率 $= \frac{4}{2} \times \frac{6-4}{-2-2} = -1$

II. ✓。圓心的距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{20}$

C_1 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 6^2 + 40} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$；$C_2$ 的半徑 $= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

由於圓心的距離 = 半徑之差，該兩圓內切。

III. ✓。面積比 $= \left(\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{20}}\right)^2 = 4$

9. $\boxed{\text{B}}$

A. ✗。x^2 及 y^2 的係數定必相等。

B. ✓。

C. ✗。圓方程內沒有 xy 項。

D. ✗。x^2 及 y^2 的係數定必相等。

10. $\boxed{\text{D}}$

將該點的坐標代入方程的左式。

A. $10^2 + 6^2 - 8(10) + 4(6) - 16 = 64 > 0$。$W$ 在圓外。

B. $8^2 + 8^2 - 8(8) + 4(8) - 16 = 80 > 0$。$X$ 在圓外。

C. $6^2 + 6^2 - 8(6) + 4(6) - 16 = 32 > 0$。$Y$ 在圓外。

D. $9^2 + 0 - 8(9) - 16 = -7 < 0$。$Z$ 在圓內。

11. $\boxed{\text{C}}$

C：$x^2 + y^2 - 2x + 8y - \dfrac{534}{5} = 0$

I. ✓。圓心 $(1,\ -4)$。由於 $3(1) + 7(-4) + 25 = 0$，該直線通過圓心。

II. ✓。$2^2 + 16^2 - 2(2) + 8(-16) - \dfrac{534}{5} = \dfrac{106}{5} > 0$。$(2,\ -16)$ 在 C 外。

III. ✗。

12. $\boxed{\text{B}}$

圓心的坐標為 $\left(4,\ -\dfrac{k}{2}\right)$。

$$\frac{-\frac{k}{2} - 2}{4 - 6} = 2$$
$$k = 4$$

13. $\boxed{\text{A}}$

圓心 $= \left(\dfrac{-8}{-2},\ \dfrac{0}{-2}\right) = (4,\ 0)$

半徑 $= \sqrt{4^2 + 0^2 + 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

14. $\boxed{\text{A}}$

I. ✓。兩圓心均在 $(-4,\ 3)$。

II. ✗。C_1 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 9} = 4$ 及 C_2 的半徑 $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > 4$.

III. ✗。代 $x = 0$。

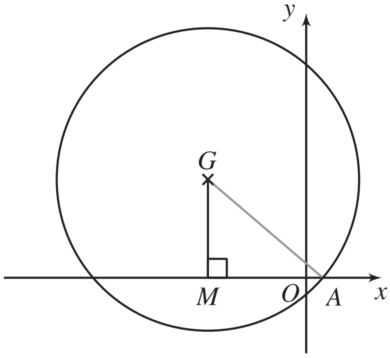
$$y^2 - 6y + 9 = 0 \quad \text{及} \quad y^2 - 6y = 0$$
$$y = 3 \qquad\qquad y = 0 \quad \text{或} \quad 6$$

C_1 與 y 軸只相交於一點。

15. $\boxed{\text{C}}$

將圓心記為 G。

設 M 為 x 軸上的一點使得 GM 垂直於 x 軸。
設 A 為該圓與正 x 軸的交點。
M 的坐標為 $(-3,\ 0)$。
$AM = \dfrac{8}{2} = 4$ 及 A 的坐標為 $(1,\ 0)$。
圓的半徑 $= \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = 5$
所求方程為 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 25$。



16. $\boxed{\text{D}}$

L 通過 C 的圓心。
C 的圓心的坐標為 $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{k}{2}\right)$。

$$2\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{-k}{2}\right) + 3 = 0$$
$$k = -\frac{16}{3}$$

17. $\boxed{\text{A}}$

設 S 的圓心為 G。G 的坐標為 $(1,\ 2)$。留意 $GM \perp AB$。
GM 的斜率 $= \dfrac{2+2}{1-3} = -2$
AB 的斜率 $= \dfrac{1}{2}$
所求方程為

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x-3)$$
$$x - 2y - 7 = 0$$

18. $\boxed{\text{B}}$

O 的坐標為 $(1,\ 3)$。
$x^2 + 0 - 2x - 0 - 8 = 0$

$$x = 4 \quad \text{或} \quad -2$$

所求面積 $= \dfrac{(4+2)(3)}{2}$

$= 9$

19. $\boxed{\text{D}}$

C：$x^2 + y^2 + 3x + 4y - \dfrac{25}{2} = 0$
圓心 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -2\right)$
半徑 $= \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \dfrac{25}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

20. $\boxed{\text{C}}$

圓心 $(2,\ k)$
L 通過 C 的圓心。

$$(2) + (k) - 7 = 0$$
$$k = 5$$

21. $\boxed{\text{D}}$

圓心 $(2,\ -1)$
P 與圓心之距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20}$
半徑 $= \sqrt{2^2 + 1^2 + 31} = 6$
所求長度 $= 2\sqrt{6^2 - (\sqrt{20})^2}$
$= 8$

22. $\boxed{\text{A}}$

L 通過圓心 $\left(\frac{k}{-2},\ -2\right)$。

$$\frac{3-(-2)}{16-\frac{k}{-2}} = \frac{1}{2}$$
$$k = -12$$

23. $\boxed{\text{C}}$

$$3^2 + 4^2 - 6(3) - 4k + 7k + 2 > 0$$
$$9 + 3k > 0$$
$$k > -3$$

24. $\boxed{\text{D}}$

I. ✗。圓心的坐標分別為 $\left(-\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$。

II. ✓。兩圓的半徑 $= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$

III. ✓。原點實為兩圓心的中點。

25. (a) C_1 及 C_2 的圓心分別為 $(2, -1)$ 及 $(-2, -3)$。 1M

所求距離 $= \sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$ 1A

(b) $\sqrt{2^2 + (-1)^2} + \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 - k} = 2\sqrt{5}$ 1M

$$\sqrt{13 - k} = \sqrt{5}$$

$$k = 8$$ 1A

26. (a) $3^2 + (-1)^2 - 6(3) - 8(-1) + k = 0$

$$k = 0$$ 1A

(b) $x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 - 6x - 8\left(-\frac{3x}{4}\right) + k = 0$

$$\frac{25x^2}{16} + k = 0$$

由於 L 與 S 相切，

$$\Delta = 0^2 - 4\left(\frac{25}{16}\right)(k) = 0$$ 1M

$$k = 0$$ 1A

(c) 半徑 $= \sqrt{\frac{10\pi}{\pi}} = \sqrt{10}$

$$\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 - k} = \sqrt{10}$$ 1M

$$25 - k = 10$$

$$k = 15$$ 1A

27. C_1 的半徑 $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$ 1M

C_2 的半徑 $= 3 \times \sqrt{\frac{16}{9}} = 4$ 1M

C_1 的圓心的坐標為 $(1, 2)$。 1M

C_2 的方程為

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$ 1A

28. (a) (i) 設 C 的坐標為 $(0, c)$。

$$\frac{2+c}{2} = 3$$ 1M

$$c = 4$$ 1A

C 的坐標為 $(0, 4)$。

(ii) $\sqrt{(a-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$ 1M

$$a^2 + 1 = 2$$

$a = 1$ 或 -1（捨去） 1A

該圓的方程為 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$。 1A

(b) $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}(1)(4-2) = 1$ 1M+1A

29. (a) $(6,\ 17)$ 1A

(b) (i) 設 $(h,\ k)$ 為 P 的坐標。

由於 P 在 L 上，可得 $4h + 3k + 50 = 0$。 1M

由於 $RP \perp L$，

$$\frac{k-17}{h-6} \times \frac{-4}{3} = -1$$ 1M

$$3h - 4k + 50 = 0$$

求解後，$h = -14$ 及 $k = 2$。

所求距離 $= \sqrt{(-14-6)^2 + (2-17)^2}$ 1M

$= 25$ 1A

(ii) (1) P、Q、R 共線。 1A

(2) $QR = 10$ 1M

$PQ = 25 - 10 = 15$ 1M

所求比例 $= PQ : QR$

$= 3 : 2$ 1A