

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 4 套

名字：_____

分校：_____

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解



派發於暑期課程
S5 – S6 M2 微分
第 1 期 – 第 4 堂

1. (a) $\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \cos 2x$ 1A
- $\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin 2x$ 1A
- (b) 當 $\frac{dy}{dx} = 0$,
- $1 + 2 \cos 2x = 0$ 1M
- $\cos 2x = -\frac{1}{2}$
- $2x = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$
- $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 1A
- 當 $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sqrt{3} < 0$ 。故此 , y 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 時達至極大值。 1A
- y 的極大值 $= \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1A
- 當 $x = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{3} > 0$ 。故此 , y 在 $x = \frac{2\pi}{3}$ 時達至極小值。
- y 的極小值 $= \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1A
2. (a) $\ln f(x) = x \ln x - 6 \ln(2x + 13)$ 1A
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 6 \cdot \frac{2}{2x + 13}$ 1M+1A
- $f'(x) = \left(\ln x + 1 - \frac{12}{2x + 13} \right) f(x)$
- $= \left(\ln x + \frac{2x + 1}{2x + 13} \right) \frac{x^x}{(2x + 13)^6}$ 1A
- (b) 對 $x > 1$, 可得 $\ln x > 0$, $\frac{2x + 1}{2x + 13} > 0$ 及 $\frac{x^x}{(2x + 13)^6} > 0$ 。 1M
- 故此 , $f'(x) > 0$ 且 $f(x)$ 為遞增函數。 1
3. $f'(x) = 2 \cos x - 1$ 1A
- 當 $f'(x) = 0$,
- $\cos x = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{\pi}{3}$ 1A
- | | | |
|---------|-------------------------|---------------------------|
| x | $0 < x < \frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ |
| $f'(x)$ | + | - |
- $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ 及 $f(\pi) = -\pi$ 。
- $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ 。 1A
- $f(x)$ 的最小值為 $-\pi$ 。 1A

4. (a) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - 3(x+h)] - (x^3 - 3x)}{h}$ 1M
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - (3x + 3h) - (x^3 - 3x)}{h}$$
- 1M
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 3)$$
- $$= 3x^2 - 3$$
- 1A
- (b) 當 C 為遞減, $\frac{dy}{dx} \leq 0$ 。
- $$3x^2 - 3 \leq 0$$
- 1M
- $$-1 \leq x \leq 1$$
- 1A
5. (a) $\frac{dy}{dx} = \cos x + 2 \sin x$ 1A
- $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x + 2 \cos x$$
- 1A
- (b) 當 $\frac{dy}{dx} = 0$,
- $$\tan x = -\frac{1}{2}$$
- $$x = \pi - \tan^{-1} \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad 2\pi - \tan^{-1} \frac{1}{2}$$
- 1M
- 當 $x = \pi - \tan^{-1} \frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{5} < 0$ 。 1M
- 當 $x = 2\pi - \tan^{-1} \frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$
- y 在 $x = 2\pi - \tan^{-1} \frac{1}{2}$ 時達至極小值。
- $$y \text{ 的極小值} = -\sin\left(\tan^{-1} \frac{1}{2}\right) - 2 \cos\left(\tan^{-1} \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$
- 1M+1A
6. (a) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h)^3 - (x+h)^2] - [2x^3 - x^2]}{h}$ 1M
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2 + 2xh + h^2) - 2x^3 + x^2}{h}$$
- 1M
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 2xh - h^2}{h}$$
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} (6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h)$$
- $$= 6x^2 - 2x$$
- 1A
- (b) $6x^2 - 2x \geq 0$ 1M
- $$x \leq 0 \quad \text{或} \quad x \geq \frac{1}{3}$$
- 1A
- (c) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(-2, -20)} = 6(-2)^2 - 2(-2) = 28$ 1M
- 所求方程為
- $$y + 20 = 28(x + 2)$$
- $$28x - y + 36 = 0$$
- 1A

7. (a) $f'(x) = 12x^2 + 2mx + n$

$$\begin{cases} -33 = 4(6)^3 + m(6)^2 + n(6) + 615 \\ 0 = 12(6)^2 + 2m(6) + n \end{cases}$$

1M

1M

求解後， $m = -30$ 及 $n = -72$ 。

1A

(b) 當 $f'(x) = 0$ ，

$$12x^2 - 60x - 72 = 0$$

$$x = 6 \quad \text{或} \quad -1$$

1M

$$f''(x) = 24x - 60$$

$$f''(6) = 24(6) - 60 = 84 > 0$$

1M

$$f''(-1) = -84 < 0$$

當 $x = -1$ ， $y = 653$ 。

因此，極小值為 -33 ，極大值為 653 。

1A

8. (a) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^2}{(x+h)+1} - \frac{x^2}{x+1}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2(x+1) - x^2(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx^2 + (h^2 + 2h)x + h^2}{h(x+1)(x+h+1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + (h+2)x + h}{(x+1)(x+h+1)}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

1M

1M

1A

(b) $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \geq 0$

1M

$$x(x+2) \geq 0$$

$$x \leq -2 \quad \text{或} \quad x \geq 0$$

1A

(接受 $x < -2$ 或 $x > 0$)

9. (a) 已知直線的斜率 $= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

故此， $f'(x) = -\frac{x}{2} + 2$ 。

所求斜率 $= f'(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ 。

(b) 只有一個轉向點，其 x 坐標 $= 4$ 。

因 $f'(x)$ 由正值轉為負值，此為極大點。

1A

1M+1A

1A

1A

10. (a) $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$ 1A
 當 $f'(x) = 0$,

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$
 1M

x	$0 < x < e$	$x > e$
$f'(x)$	+	-

1M

$f(x)$ 的極大值為 $f(e) = \frac{1}{e}$ 。

1A

(b) 利用 (a) , $f(x) \leq f(e)$ 。

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$$

1M

$$\ln x^e \leq x$$

$$e^x \geq x^e$$

1

11. (a) $\frac{dy}{dx} = 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 1M
 當 $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ 。

駐點為 $\left(\frac{\pi}{6}, 1 + \pi \right)$ 。

1A

(b)

x	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	+	-

1M

$\left(\frac{\pi}{6}, 1 + \pi \right)$ 為極大點。

1A

12. (a) $\frac{dy}{dx} = e^{x+1} + xe^{x+1}$ 1A
 $= e^{x+1} (1 + x)$

當 $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = -1$ 。

駐點為 $(-1, -1)$ 。

1A

(b)

x	$x < -1$	$x > -1$
$\frac{dy}{dx}$	-	+

1M

$(-1, -1)$ 為極小點。

1A

$$13. \frac{dy}{dx} = 2x(1-3x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2 \left(\frac{1}{2}\right) (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}}(-6x) \quad 1M$$

$$= (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}} [2x(1-3x^2) - 3x^3]$$

$$= (1-3x^2)^{-\frac{1}{2}} (-9x^3 + 2x)$$

$$\text{當 } \frac{dy}{dx} = 0, x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\sqrt{2}}{3}。$$

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < -\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < 0$	$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{dy}{dx}$	+	-	+	-

1M

$$\text{極大點為 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{27}\right) \text{ 及 } \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{27}\right)。$$

1A

$$\text{極小點為 } (0, 0)。$$

1A

$$14. (a) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4kx - 4k^2 \quad 1M$$

$$= (x-2k)(3x+2k)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4k$$

$$\text{當 } \frac{dy}{dx} = 0, x = 2k \text{ 或 } -\frac{2k}{3}。$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2k} = 6(2k) - 4k = 8k > 0$$

1M

因此， y 在 $x = 2k$ 時達至局部極小值。

1

$$(b) (2k)^3 - 2k(2k)^2 - 4k^2(2k) = -1000$$

$$-8k^3 = -1000$$

$$k^3 = 125$$

$$k = 5$$

1A

$$15. (a) f'(x) = 12x^2 + 4kx + 15 \quad 1A$$

(b) 由於 $f(x)$ 為連續且沒有轉向點，可得對所有 $x \in \mathbb{R}$ ， $f'(x) \geq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$ 。

$$\Delta = (4k)^2 - 4(12)(15) \leq 0$$

1M

$$16k^2 - 720 \leq 0$$

$$-3\sqrt{5} \leq k \leq 3\sqrt{5}$$

1A

16. (a) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{(x+h)^2} + \frac{6}{x^2}}{h}$ 1M
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{hx^2(x+h)^2}$$
- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x + 6h}{x^2(x+h)^2}$$
- $$= \frac{12x}{x^4}$$
- $$= \frac{12}{x^3}$$
- (b) 當曲線為遞增時， $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{x^3} \geq 0$ 。 1M
- 所求範圍為 $x > 0$ 。 1A

17. (a) $y = 1 + \frac{\ln x}{x}$
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x(1)}{x^2}$$
- $$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
- $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 \left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)(2x)}{x^4}$$
- $$= \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4}$$
- $$= \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$
- (b) 當 $\frac{dy}{dx} = 0$,
- $$1 - \ln x = 0$$
- $$\ln x = 1$$
- $$x = e$$
- 當 $x = e$, $y = \frac{e + \ln e}{e} = \frac{e + 1}{e}$ 。
- 駐點為 $\left(e, \frac{e + 1}{e}\right)$ 。 1A
- $$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=e} = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$
- $\left(e, \frac{e + 1}{e}\right)$ 為極大點。 1M 1A

18. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x+1) - (x^2+p)}{(x+1)^2}$ 1M
 $= \frac{x^2 + 2x - p}{(x+1)^2}$ 1A
- (b) (i) $\frac{1^2 + 2 - p}{(1+1)^2} = 0$ 1M
 $p = 3$ 1A
- (ii) $x^2 + 2x - 3 = 0$ 1M
 $x = -3$ 或 1
- | x | $x < -3$ | $-3 < x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
|-----------------|----------|---------------|--------------|---------|
| $\frac{dy}{dx}$ | + | - | - | + |
- 當 $x = -3$, $y = -6$; 當 $x = 1$, $y = 2$ 。
 局部極大值為 -6 , 局部極小值為 2 。 1A+1A
19. (a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 1A
 α 及 β 為 $f'(x) = 0$ 的根。 1M
 因此, $\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$ 及 $\alpha\beta = \frac{b}{3}$ 。 1A
- (b) 由於 $f'(x) = 0$ 有兩實根,
 $\Delta = (2a)^2 - 4(3b) > 0$ 1M
 $4a^2 - 12b > 0$
 $a^2 > 3b$ 1
- (c) $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) - (\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c)}{\alpha - \beta}$
 $= \frac{(\alpha^3 - \beta^3) + a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}$
 $= (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + a(\alpha + \beta) + b$ 1M
 $= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + b$
 $= \frac{4a^2}{9} - \frac{b}{3} - \frac{2a^2}{3} + b$ 1M
 $= \frac{2}{9}(3b - a^2)$ 1
- (d) 由於 $a^2 > 3b$, 可得 $\frac{2}{9}(3b - a^2) < 0$ 。故此, $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$ 。 1M
 故此, $f(\alpha) - f(\beta) < 0$ 若 $\alpha - \beta > 0$ 。
 當 $\alpha > \beta$ 時, $f(\alpha) < f(\beta)$ 。 1A