

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 3 套

名字：_____

分校：_____

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解



派發於暑期課程
S5 – S6 M2 微分
第 1 期 – 第 3 堂

1. $x \ln y^2 + y^2 = 9$
- $$\ln y^2 + \frac{2x}{y} \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1M+1A$$
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln y^2}{\frac{2x}{y} + 2y}$$
- $$= -\frac{y \ln y^2}{2x + 2y^2}$$
- 當 $x = 0$, $y = \pm 3$ 。
- 在 $(0, 3)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \ln 9}{18} = -\frac{\ln 3}{3}$; 在 $(0, -3)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 3}{3}$ 。 1A
- 在 $(0, 3)$, 切線方程為 $y = -\frac{x \ln 3}{3} + 3$ 。 1A
- 在 $(0, -3)$, 切線方程為 $y = \frac{x \ln 3}{3} - 3$ 。 1A
-
2. (a) $x^2 + xy + y^2 = 4$
- $$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1M$$
- $$(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -2x - y$$
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y} \quad 1A$$
- (b) 在 $(2, 0)$,
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(2) - 0}{2 + 0} \quad 1M$$
- $$= -2$$
- 所求方程為
- $$y - 0 = -2(x - 2) \quad 1M$$
- $$2x + y - 4 = 0 \quad 1A$$
-
3. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(2x + 8)^{\frac{1}{2}}(2) + 6x$ 1M
- $$= 3\sqrt{2x + 8} + 6x \quad 1A$$
- (b) 切線斜率 = -6
- $$3\sqrt{2x + 8} + 6x = -6 \quad 1M+1A$$
- $$\sqrt{2x + 8} = -2 - 2x$$
- $$2x + 8 = 4x^2 + 8x + 4$$
- $$4x^2 + 6x - 4 = 0 \quad 1M$$
- $$x = -2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} \quad (\text{捨去}) \quad 1A$$
- 只有一條 C 的切線平行於直線 $6x + y + 4 = 0$ 。
- 因此，不同意該宣稱。 1A

4. 設 (a, b) 為切點。

則 $b = a^2 - 3a + 3$ 。

$$y = x^2 - 3x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

考慮連接 (a, b) 及 $(3, 2)$ 的直線。

$$\frac{b - 2}{a - 3} = 2a - 3$$

1M

$$\frac{(a^2 - 3a + 3) - 2}{a - 3} = 2a - 3$$

1M

$$a^2 - 3a + 1 = 2a^2 - 9a + 9$$

$$0 = a^2 - 6a + 8$$

$$a = 2 \quad \text{或} \quad 4$$

切點為 $(2, 1)$ 及 $(4, 7)$ 。

1A

在 $(2, 1)$ ，切線方程為

$$y - 1 = [2(2) - 3](x - 2)$$

1M

$$x - y - 1 = 0$$

1A

在 $(4, 7)$ ，切線方程為

$$y - 7 = [2(4) - 3](x - 4)$$

$$5x - y - 13 = 0$$

1A

5. (a) 售價 $= x(1 + 70\%)(1 - 5\%) = 1.615x$

1A

$$\text{百分比} = \frac{1.615x - x}{x} \times 100\%$$

1M

$$= 61.5\%$$

1A

(b) $1.615x = 2907$

1M

$$x = 1800$$

1A

6. $y^2 = x^2y + 2$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$$

當 $x = 1$,

$$y^2 = y + 2$$

$$y = 2 \quad \text{或} \quad -1$$

在 $(1, 2)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}$ 且切線的方程為

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$$

$$4x - 3y + 2 = 0$$

在 $(1, -1)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$ 且切線的方程為

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$2x - 3y - 5 = 0$$

1M

1A

1A

1A

7. $xe^y - y^3 \cos x = 5$

$$e^y + xe^y \frac{dy}{dx} - 3y^2 \cos x \frac{dy}{dx} + y^3 \sin x = 0$$

$$(xe^y - 3y^2 \cos x) \frac{dy}{dx} = -e^y - y^3 \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y + y^3 \sin x}{3y^2 \cos x - xe^y}$$

當 $y = 0$, $x = 5$ 。

在 $(5, 0)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1+0}{0-5} = -\frac{1}{5}$ 。

所求方程為

$$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 5)$$

$$x + 5y - 5 = 0$$

1M+1M

1A

1M

1A

8. $xy = 1$

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1M$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

設 (a, b) 為曲線上的一點。則 $ab = 1$ 及

$$\frac{b+4}{a-2} = -\frac{b}{a} \quad 1M$$

$$ab + 4a = 2b - ab$$

$$4a + 1 = 2b - 1 \quad (\text{由於 } ab = 1)$$

$$\frac{4}{b} + 1 = 2b - 1 \quad 1M$$

$$0 = 2b^2 - 2b - 4$$

$$b = 2 \quad \text{或} \quad -1 \quad 1A$$

當 $b = 2$, $a = \frac{1}{2}$ 。切線方程為

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -4x + 4 \quad 1A$$

當 $b = -1$, $a = -1$ 。切線方程為

$$y + 1 = -1(x + 1)$$

$$y = -x - 2 \quad 1A$$

9. 設切點為 (a, b) 。則 $b^2 = 4a$ 。

$$y^2 = 4x$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \quad 1M$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

故此，

$$\frac{b-0}{a+1} = \frac{2}{b} \quad 1M$$

$$b^2 = 2a + 2$$

$$4a = 2a + 2 \quad 1M$$

$$a = 1$$

當 $a = 1$, $b = \pm 2$ 。

切線的方程為

$$y - 2 = \frac{2}{2}(x - 1) \quad \text{及} \quad y + 2 = \frac{2}{-2}(x - 1)$$

$$y = x + 1$$

$$y = -x - 1$$

1A+1A

10. (a) $y = ae^{\ln x^x}$
 $= ae^{x \ln x}$
 $\frac{dy}{dx} = ae^{x \ln x} \left(\ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ 1M
 $= ax^x (\ln x + 1)$
 $-6e^e = ae^e (\ln e + 1)$
 $a = -3$ 1A
- (b) 當 $x = 1$, $y = -3$ 。
 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -3(1)(\ln 1 + 1) = -3$ 1M
 所求方程為
 $y + 3 = -3(x - 1)$
 $3x + y = 0$ 1A
11. $x \ln y + y = 2$
 $\ln y + x \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$ 1M+1M
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \ln y}{x + y}$
 當曲線與 y 軸相交時, $x = 0$ 及 $y = 2$ 。
 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0, 2)} = -\frac{2 \ln 2}{0 + 2} = -\ln 2$ 1M
 該切線的方程為 $y = -x \ln 2 + 2$ 。 1A
12. (a) $y = 8(3x - 2)^{-2}$
 $\frac{dy}{dx} = -48(3x - 2)^{-3}$ 1A
 代 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$,
 $-\frac{3}{4} = -48(3x - 2)^{-3}$ 1M
 $3x - 2 = \sqrt[3]{64}$
 $x = 2$
 P 的坐標為 $\left(2, \frac{1}{2} \right)$ 。 1A
- (b) 所求方程為
 $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 2)$ 1M
 $8x - 6y - 13 = 0$ 1A

13. 設 P 的坐標為 (a, b) 。

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_P = 3a^2$$

1A

考慮 L 的斜率，

$$3a^2 = \frac{-16 - b}{0 - a}$$

1M

$$3a^3 = b + 16$$

$$3a^3 = a^3 + 16$$

1M

$$a = 2$$

當 $a = 2$ ， $b = 8$ 。

1A

L 的方程為 $y = 12x - 16$ 。

1A

14. $xe^0 + 0 = 6$

$$x = 6$$

1A

$$xe^y + y^2 \sin x = 6$$

$$e^y + xe^y \frac{dy}{dx} + 2y \sin x \frac{dy}{dx} + y^2 \cos x = 0$$

1M+1M

$$(xe^y + 2y \sin x) \frac{dy}{dx} = -e^y - y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + y^2 \cos x}{xe^y + 2y \sin x}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(6, 0)} = -\frac{e^0 + 0}{6e^0 + 0} = -\frac{1}{6}$$

1M

所求方程為

$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 6)$$

$$x + 6y - 6 = 0$$

1A

15. (a) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$

1M+1A

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{2}{\sqrt{1}} - 1 = 1$$

所求方程為

$$y - 8 = 1(x - 1)$$

$$x - y + 7 = 0$$

1A

$$(b) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x-3}$$

1M

$$(1) \left(-\frac{1}{x-3} \right) = -1$$

1M

$$x = 4$$

當 $x = 4$ ， $y = 11$ 。 Q 的坐標為 $(4, 11)$ 。

1A

16. 當 $x = 0$, $\ln y = 0$ 故此 $y = 1$ 。

1A

$$x^2 + xy = \ln y$$
$$2x + y + x \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

1M+1A

在 $(0, 1)$,

$$0 + 1 + 0 = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 1$$

1A

切線方程為 $y = x + 1$ 。

1A