Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　第 4 套

名字：____________________ 分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 1 期 – 第 4 堂

1. (a) $1 + 3 = -\frac{p}{1}$ 1M

$p = -4$ 1A

$1 \times 3 = \frac{q}{1}$

$q = 3$ 1A

(b) $y = x^2 - 4x + 3$

$= (x^2 - 4x + 4) - 1$ 1M

$= (x - 2)^2 - 1$ 1A

(c) $y = (2x + 1)^2$

$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

沿 y 軸縮小至原來的 $\frac{1}{4}$ 倍。 1A

向右平移 $\frac{5}{2}$ 單位。 1A

向下平移 1 單位。 1A

2. (a) $f(x) = \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} + 11$

$= \frac{1}{16}(x^2 - 8x + 16) + 10$ 1M

$= \frac{1}{16}(x - 4)^2 + 10$

頂點的坐標為 $(4,\ 10)$。 1A

(b) $g(x) = -f(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)^2 - 10$ 1M

$h(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)^2 + 6$ 1M

y 截距 $= -\frac{1}{16}(0 - 4)^2 + 6 = 5$ 1A

3. (a) $f(x) = x^2 - 6kx + 12k^2 + 6$

$= (x^2 - 6x + 9k^2) + 3k^2 + 6$ 1M

$= (x - 3k)^2 + 3k^2 + 6$

頂點的坐標為 $\left(3k,\ 3k^2 + 6\right)$。 1A

(b) $P\left(3k - 3,\ 3k^2 + 6\right)$ 及 $Q\left(3k + 3,\ -3k^2 - 6\right)$。 1A

考慮由點 $(0,\ 6)$ 至點 P 及至點 Q 的距離。

$\sqrt{(3k - 3)^2 + (3k^2)^2} = \sqrt{(3k + 3)^2 + (-3k^2 - 6 - 6)^2}$ 1M

$-72k^2 - 36k - 144 = 0$

$\Delta = 36^2 - 4(-72)(-144) = -40\,176 < 0$ 1M

該方程沒有實根。

因此，點 R 不存在。 1A

4. (a) $g(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 + 4$

$= (x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 4$ 1M

$= (x - k)^2 + k^2 + 4$

頂點的坐標為 $\left(k,\ k^2 + 4\right)$。 1A

(b) D 及 E 的坐標分別為 $\left(k - 2,\ k^2 + 4\right)$ 及 $\left(k + 2,\ -k^2 - 4\right)$。 1A

假定 $(0,\ 3)$ 為 $\triangle DEF$ 的外心。

$$\sqrt{(k-2)^2 + (k^2 + 4 - 3)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (-k^2 - 4 - 3)^2}$$ 1M

$$(k-2)^2 - (k+2)^2 = (k^2 + 7)^2 - (k^2 + 1)^2$$

$$-8k = 12k^2 + 48$$

$$0 = 12k^2 + 8k + 48$$

$\Delta = 8^2 - 4(12)(48) = -2240 < 0$ 1M

該方程沒有實根。$(0,\ 3)$ 不可能為外心。

點 F 不存在。 1A

5. (a) $g(x) = f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 3x + 4$。 1A

(b) $h(x) = g(x + 1)$

$= -(x + 1)^3 - 2(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 4$

$= -x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ 1A

(c) 設 $y = f(x)$ 的圖像向左平移 1 單位後沿 y 軸反射所得的圖像為 $y = k(x)$。

$k(x) = f(-x + 1)$ 1M

$= -x^3 + x^2 + 4x$ 1A

$\neq h(x)$

該宣稱不正確。 1A

6. (a) 當 $y = 0$ 時，$3x^2 - 6mx + 4m^2 = 0$。

$$\begin{aligned}\Delta &= (6m)^2 - 4(3)(4m^2) \\ &= -12m^2 \\ &< 0\end{aligned}$$ 1M

該圖像沒有 x 截距。 1

(b) $y = f(x)$

$= 3(x^2 - 2mx + m^2) + m^2$ 1M

$= 3(x - m)^2 + m^2$

頂點的坐標為 $(m,\ m^2)$。 1A

(c) A 及 B 的坐標分別為 $(m,\ m^2)$ 及 $(m,\ 0)$。 1A

由於 $\angle OBA = 90°$，外心為 OA 的中點。

外心的坐標為 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2}{2}\right)$。 1A

當 $m = 2$ 時，外心的坐標為 $(1,\ 2)$，即不在 $y = x$ 上。 1M

該宣稱不正確。 1A

7. (a) $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 - \frac{k}{2}x + k - 1$

$= \frac{-1}{3}\left(x^2 + \frac{3k}{2} + \frac{9k^2}{16}\right) + \frac{3k^2}{16} + k - 1$ 1M

$= \frac{-1}{3}\left(x + \frac{3k}{4}\right)^2 + \frac{3k^2}{16} + k - 1$

S 的坐標為 $\left(-\frac{3k}{4}, \frac{3k^2}{16} + k - 1\right)$。 1A

(b) (i) $g(x) = \frac{3}{2}f(-x)$

T 的坐標為 $\left(\frac{3k}{4}, \frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2}\right)$。 1A

(ii) 由於 S 為 $\triangle OST$ 的垂心，$\angle OST = 90°$。

$$\frac{\frac{3k^2}{16} + k - 1}{-\frac{3k}{4}} \times \frac{\frac{9k^2}{32} + \frac{3k}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3k^2}{16} - k + 1}{\frac{3k}{4} + \frac{3k}{4}} = -1$$ 1M

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3k^2}{16} + k - 1\right)^2 = \frac{9k^2}{8}$$

$$\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \pm\frac{3k}{2}$$

若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = \frac{3k}{2}$，

$$\frac{3k^2}{16} - \frac{k}{2} - 1 = 0$$

$k = 4$ 或 $-\frac{4}{3}$（捨去） 1A

若 $\frac{3k^2}{16} + k - 1 = -\frac{3k}{2}$，

$$\frac{3k^2}{16} + \frac{5k}{2} - 1 = 0$$

$k \approx -13.7$（捨去） 或 -0.389（捨去）

T 的坐標為 $(3, 9)$。$\triangle OST$ 的外心在 OT 的中點。

所求坐標為 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$。 1A

8. (a) $B(-3,\ 4)$ 1A

P 的對稱軸為 $x = \dfrac{6a}{2a}$，即 $x = 3$。 1A

C 的坐標為 $(9,\ 4)$。 1A

(b) $f(3) = 9a - 18a + 9a + b = b$ 1M

P 的頂點的坐標為 $(3,\ b)$。

$$b - (-4) = 5$$

$$b = 1$$ 1A

P 通過 B。

$$a(-3)^2 - 6(-3) + (9a + 1) = 4$$

$$36a + 1 = 4$$

$$a = \frac{1}{12}$$ 1A

(c) (i) $ABDC$ 的面積在當 AD 為直徑時最大，即 $\angle ABD = 90°$。 1M

藉對稱性質，D 的坐標為 $(3,\ k)$，其中 k 為一常數。

$$\frac{k-4}{3+3} \times \frac{4+4}{-3-3} = -1$$ 1M

$$k = \frac{17}{2}$$ 1A

D 的坐標為 $\left(3,\ \dfrac{17}{2}\right)$。

(ii) $AB = \sqrt{(3+3)^2 + (4+4)^2} = 10$

$BD = \sqrt{(3+3)^2 + \left(\dfrac{17}{2} - 4\right)^2} = \dfrac{15}{2}$ 1A

設內切圓的半徑為 r。

$$\frac{\frac{15}{2} - r}{r} = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)}{10}$$ 1M

$$r = \frac{30}{7}$$

$$\text{該圓的面積} = \pi\left(\frac{30}{7}\right)^2$$

$$< 25\pi$$

同意該宣稱。 1A

9. (a) $g(x) = \log_3 \dfrac{x}{4} - 3$ 1A+1A

(b) $g(x) = \log_3 \dfrac{x}{4} - 3$

$$= \log_3\left(\frac{x}{4} \div 3^3\right)$$

$$= \log_3 \frac{x}{108}$$ 1A

$y = g(x)$ 的圖像可透過將 $y = \log_3 x$ 的圖像沿 x 軸放大至原來的 108 倍所得。 1A

同意該宣稱。 1A

10. (a) $f(3) = \dfrac{1}{k+2}[3^2 + (2k-2)3 - 5k - 1]$

$= \dfrac{1}{k+2}(k+2)$

$= 1$

$y = f(x)$ 的圖像通過 A。 1

(b) (i) $g(x) = f(-x) - 2$ 1M

$= \dfrac{1}{k+2}[x^2 - (2k-2)x - 7k - 5]$

$= \dfrac{1}{k+2}[(x - 2(k-1)x + (k-1)^2) - k^2 - 5k - 6]$ 1M

$= \dfrac{1}{k+2}[(x - (k-1)^2) - k^2 - 5k - 6]$

$= \dfrac{1}{k+2}[x - (k-1)]^2 - \dfrac{(k+2)(k+3)}{k+2}$

$= \dfrac{1}{k+2}[x - (k-1)]^2 - k - 3$

M 的坐標為 $(k-1,\ -k-3)$。 1A

(ii) AN 為 $\triangle ANM$ 的外接圓的直徑。

故此，$\angle AMN = 90°$。 1M

$$\frac{(-k-3)+9}{(k-1)-1} \times \frac{1-(-k-3)}{3-(k-1)} = -1$$ 1M

$$-k^2 + 2k + 24 = k^2 - 6k + 8$$

$$-2k^2 + 8k + 16 = 0$$

$$k = 2 + 2\sqrt{3} \quad 或 \quad 2 - 2\sqrt{3}（捨去）$$ 1A

(iii) P 的坐標為 $(-3,\ -1)$。 1A

Q 的坐標為 $\left(1 + 2\sqrt{3},\ -5 - 2\sqrt{3}\right)$。

外心 S 在 AN 上。故此，S 為 AN 的中點。

S 的坐標為 $(2,\ -4)$。 1A

PS 的斜率 $= \dfrac{-1+4}{-3-2} = \dfrac{-3}{5}$ 1M

PQ 的斜率 $= \dfrac{-5 - 2\sqrt{3} + 1}{1 + 2\sqrt{3} + 3} = -1 \neq \dfrac{-3}{5}$

P、Q、S 不共線。

不同意該宣稱。 1A