Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　$\boxed{\text{第 3 套}}$

名字：____________________　　　　電話：__________

學生編號：____________________　　　　分校：__________

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 1 期 – 第 3 堂

1. $\boxed{\text{B}}$

判別式 $= (k-3)^2 - 4(1)(2k)$

$= k^2 - 14k + 9$

所求數值 $= -\dfrac{-14}{2} = 7$

2. $\boxed{\text{D}}$

設 $y = f(x)$ 的圖像的頂點為 $(h,\ 6)$。

$h = -\dfrac{-12}{2(2-q)} = \dfrac{6}{2-q}$

$$6 = (2-q)\left(\frac{6}{2-q}\right)^2 - 12\left(\frac{6}{2-q}\right) - 3$$

$$9 = \frac{36-72}{2-q}$$

$$2-q = -4$$

$$q = 6$$

3. $\boxed{\text{C}}$

當高度為極大值時，$t = -\dfrac{12}{2(-5)} = 1.2$。

最高高度 $= 4 + 12(1.2) - 5(1.2)^2$

$= 11.2\,\text{m}$

4. $\boxed{\text{D}}$

$y = x^2 - 2ax + 8$

$= (x-a)^2 + 8 - a^2$

故此，$a = 3$ 及 $k = 8 - a^2 = -1$。

5. $\boxed{\text{D}}$

當 y 為極大時，$x = -\dfrac{5}{2(1)} = -\dfrac{5}{2}$。

$$-\frac{7}{4} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) + k$$

$$k = \frac{9}{2}$$

6. $\boxed{\text{D}}$

$x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$。最小值為 9，對應 $x = 1$。

藉考慮曲線 $y = x^2 - 2x + 10$ 的形狀，最大值必定在曲線的兩端。

當 $x = -2$ 時，$x^2 - 2x + 10 = 18$；當 $x = 3$ 時，$x^2 - 3x + 10 = 13$。

故此，最大值為 18。

7. $\boxed{\text{D}}$

當 T 達至極小值時，$x = -\dfrac{-3}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 12$。

所求時間為加入冰塊後的 12 分鐘。

8. $\boxed{\text{B}}$

當 $x = -\dfrac{(-3)}{2(4)} = \dfrac{3}{8}$ 時，$f(x)$ 達至其極小值。

9. $\boxed{\text{B}}$

A. ✗。直線的圖像沒有極大點。

B. ✓。該圖像開口向下。

C. ✗。直線的圖像沒有極大點。

D. ✗。該圖像開口向上。

10. $\boxed{\text{B}}$

x 截距為 -1 及 3。圖像的方程為 $y = a(x + 1)(x - 3)$，其中 a 為常數。

$$6 = a(0 + 1)(0 - 3)$$

$$a = -2$$

$y = -2(x + 1)(x - 3) = -2x^2 + 4x + 6$

頂點的 x 坐標 $= -\dfrac{4}{2(-2)} = 1$，而頂點的 y 坐標 $= -2(1)^2 + 4(1) + 6 = 8$。

最大可取面積 $= \dfrac{(3 + 1)(8)}{2} = 16$。

11. $\boxed{\text{A}}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4}v^2 + \left(\frac{1}{2}v - 50\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}v^2 - 50v + 2500 \\ &= \frac{1}{2}(v - 50)^2 + 1250 \end{aligned}$$

最小成本 = \$1250。

12. $\boxed{\text{D}}$

重寫方程為 $4x^2 + kx + (k - 3) = 0$。

$$\begin{aligned} \Delta = k^2 - 4(4)(k - 3) &= 0 \\ k^2 - 16k + 48 &= 0 \\ k &= 4 \text{ 或} 12 \end{aligned}$$

當 $k = 4$，$x = -\dfrac{1}{2}$；當 $k = 12$，$x = -\dfrac{3}{2}$。

13. $\boxed{\text{B}}$

當 $f(x)$ 達至極大值時，$x = -\dfrac{4}{2(-2)} = 1$。

極大值 $= -2(1)^2 + 4(1) - 1$

$= 1$

14. $\boxed{\text{D}}$

$\triangle ABC$ 的面積 $= \dfrac{(6-x)(3x+2)}{2}$

$= -\dfrac{3x^2}{2} + 8x + 6$

所求數值 $= -\dfrac{8}{2\left(-\frac{3}{2}\right)}$

$= \dfrac{8}{3}$

15. $\boxed{\text{C}}$

I. ✓。

II. ✓。

III. ✗。對稱軸為 $x = 3$。

16. $\boxed{\text{D}}$

$f(x) = x^2 + 10x + 8 = (x+5)^2 - 17$

I. ✗。對稱軸應為 $x = -5$。

II. ✗。$f(3 + x^2) = (8 + x^2)^2 - 17$。
由於 $x^2 + 8 \geq 8$，最小值為 $8^2 - 17 = 47$。

17. $\boxed{\text{C}}$

頂點的 x 坐標 $= -\dfrac{4}{2(-2)} = 1$。

$f(1) = k + 4 - 2 = 7$

$k = 5$

18. $\boxed{\text{D}}$

$A(2,\ 0)$ 及 $B(4,\ 0)$。

C 的 x 坐標 $= \dfrac{2+4}{2} = 3$

當 $x = 3$，$y = -(3-2)(3-4) = 1$。

所求面積 $= \dfrac{(4-2)(1)}{2} = 1$ 平方單位

19. $\boxed{\text{D}}$

當 y 達至極大值時，$x = -\frac{c}{2(-1)} = \frac{c}{2}$。

$$7 = -\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c\left(\frac{c}{2}\right) + 3$$

$$4 = \frac{c^2}{4}$$

$$c = \pm 4$$

20. $\boxed{\text{C}}$

當 P 達至極大值時，$x = -\frac{1200}{2(-3)} = 200$。

所求盈利 $= -3(-200)^2 + 1200(200) - 50\,000$

$= \$70\,000$

21. (a) $3x^2 - 12x + 14 = 3[x^2 - 2(2)(x) + 2^2] + 2$ 1M+1A

$= 3(x - 2)^2 + 2$

因此，$a = -2$ 及 $b = 2$。 1A

(b) $\dfrac{6}{3x^2 - 12x + 14} = \dfrac{6}{3(x - 2)^2 + 2}$

該函數有一極大值 $\dfrac{6}{2} = 3$，當 $x = 2$ 時。 1M

不同意該宣稱。 1A

22. (a) 售出的數量 $= 400 - 20x$ 1A

總收入 $= \$[(30 + x)(400 - 20x)]$

$= \$\left[-20x^2 - 200x + 12\,000\right]$ 1A

(b) $y = \left(-20x^2 - 200x + 12\,000\right) - 20(400 - 20x)$ 1M

$= -20x^2 + 200x + 4000$ 1A

(c) $y = -20x^2 + 200x + 4000$

$= -20[x^2 - 2(5)(x) + 5^2] + 4500$ 1M

$= -20(x - 5)^2 + 4500$ 1M

因此，最大利潤為 \$4500。 1A

23. (a) $A = w(100 - 2w)$ 1M

$= -2w^2 + 100w$ 1A

(b) 當 $w = 20$，$A = 1200$。

因此，所求面積為 1200 m^2。 1A

(c) 當 $A = 912$，

$912 = -2w^2 + 100w$ 1M

$0 = -2w^2 + 100w - 912$

$x = 12$ 或 38

因此，所求闊度為 12 m 或 38 m。 1A

(d) $A = -2w^2 + 100w$

$= -2[w^2 - 2(25)(w) + 25^2] + 1250$ 1M

$= -2(w - 25)^2 + 1250$ 1M

因此，最大面積為 1250 m^2。 1A

24. (a) $2x^2 - 9x - 5 = 0$

$x = 5$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

$g(5) = m - 2(5)^2 = 0$ 1M

$m = 50$ 1A

(b) $f(x) = 2x^2 - 9x - 5$

$= 2\left[x^2 - 2\left(\dfrac{9}{4}\right)x + \left(\dfrac{9}{4}\right)^2\right] - \dfrac{121}{8}$ 1M

$= 2\left(x - \dfrac{9}{4}\right)^2 - \dfrac{121}{8}$ 1A

(c) $y = g(x)$ 的圖像先沿 x 軸反射， 1A

然後向上平移 $\dfrac{279}{8}$ 單位及向右平移 $\dfrac{9}{4}$ 單位。 1A+1A

另一解法

$y = g(x)$ 的圖像先向下平移 $\dfrac{279}{8}$ 單位及向右平移 $\dfrac{9}{4}$ 單位， 1A+1A

然後沿 x 軸反射。 1A

25. (a) $f(x) = ax^2 + 8a^2x + 16a^3 + a$

$= a(x^2 + 8ax + 16a^2) + a$ 1M

$= a(x + 4a)^2 + a$

頂點的坐標為 $(-4a,\ a)$。 1A

(b) (i) $y = f(x)$ 的圖像向右平移 $5a$ 單位， 1A

然後沿 y 軸放大至原來的 4 倍 1A

成為 $y = g(x)$ 的圖像。

(ii) $(a,\ 4a)$ 1A

(iii) $P(-4a,\ a)$ 及 $Q(a,\ 4a)$

（OP 的斜率）×（OQ 的斜率）$= \dfrac{a - 0}{-4a - 0} \times \dfrac{4a - 0}{a - 0}$ 1M

$= -1$

故此，$\angle POQ = 90°$，垂心在 O。 1M

因此，垂心的坐標為 $(0,\ 0)$。 1A