

Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程 2022 – 2023

數學 延伸部分

S5 – S6 M2 微分 功課 第 1 套

名字：\_\_\_\_\_

電話：\_\_\_\_\_

學生編號：\_\_\_\_\_

分校：\_\_\_\_\_

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

**考生須知**

1. 本試卷各題均須作答，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

**建議題解**



派發於暑期課程  
S5 – S6 M2 微分  
第 1 期 – 第 1 堂

1.  $f(x) = A(2x + 4)^{\frac{5}{2}} + B(2x - 4)^{-\frac{3}{2}}$   
 $f'(x) = \frac{5A}{2}(2x + 4)^{\frac{3}{2}}(2) - \frac{3B}{2}(2x - 4)^{-\frac{5}{2}}(2)$  1A  

$$\begin{cases} 500 = A(5 + 4)^{\frac{5}{2}} + B(5 - 4)^{-\frac{3}{2}} \\ 228 = 5A(5 + 4)^{\frac{3}{2}} - 3B(5 - 4)^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$
 1M  
 求解後，可得  $A = 2$  及  $B = 14$ 。 1A+1A
2.  $f(x) = A(x^2 + 3)^2 + B(2x - 3)^{-1}$   
 $f'(x) = 2A(x^2 + 3)(2x) - B(2x - 3)^{-2}(2)$  1A  
 $\frac{1}{9} = 0 - 2B(-3)^{-2}$  1M  
 $B = \frac{-1}{2}$  1A  
 $5 = 2A(1 + 3)(2) + (-1)^{-2}$   
 $A = \frac{1}{4}$  1A
3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$  1M+1A
4.  $\frac{dy}{dx} = 3(2x + 1)^2(2)(x - 4)^5 + (2x + 1)^3(5)(x - 4)^4$  1M+1A  
 $= (2x + 1)^2(x - 4)^4[6(x - 4) + 5(2x + 1)]$   
 $= (2x + 1)^2(x - 4)^4(16x - 19)$  1A
5.  $y = (3x - 2)^3(3x + 2)^{-3}$   
 $\frac{dy}{dx} = 3(3x - 2)^2(3)(3x + 2)^{-3} + (3x - 2)^3(-3)(3x + 2)^{-4}(3)$  1M+1A  
 $= (3x - 2)^2(3x + 2)^{-4}[9(3x + 2) - 9(3x - 2)]$   
 $= 36(3x - 2)^2(3x + 2)^{-4}$  1A
6.  $f(x) = (x - 4)^{\frac{3}{2}}(x^2 + 4x + 16)^{\frac{3}{2}}$   
 $f'(x) = \frac{3}{2}(x - 4)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 16)^{\frac{3}{2}} + (x - 4)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)(x^2 + 4x + 16)^{\frac{1}{2}}(2x + 4)$  1M+1A  
 $= \frac{3}{2}(x - 4)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 16)^{\frac{1}{2}}[(x^2 + 4x + 16) + (x - 4)(2x + 4)]$   
 $= \frac{9x^2}{2}(x - 4)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 16)^{\frac{1}{2}}$   
 $\frac{9a^2}{2}(a - 4)^{\frac{1}{2}}(a^2 + 4a + 16)^{\frac{1}{2}} = 0$   
 $a = 0$  (捨去) 或  $4$  或  $a^2 + 4a + 16 = 0$   
 對  $a^2 + 4a + 16 = 0$ ,  $\Delta = 4^2 - 4(1)(16) = -48 < 0$ 。 1M  
 該方程沒有實根。  
 因此,  $a = 4$ 。 1A

7.  $y = \frac{\ln(x^2 + 2^x + e^{2x})}{2 \ln 2}$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{1}{x^2 + 2^x + e^{2x}} \times (2x + 2^x \ln 2 + 2e^{2x})$  1M+1A  
 $= \frac{2x + 2^x \ln 2 + 2e^{2x}}{2 \ln 2(x^2 + 2^x + e^{2x})}$   
 $= \frac{x + 2^{x-1} \ln 2 + e^{2x}}{\ln 2(x^2 + 2^x + e^{2x})}$  1A
8.  $\frac{dy}{dx} = -\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)$  1M  
 $= \sin^2 x - \cos^2 x$  1A
9.  $g'(x) = f'(\sin x) \cos x + f'(\cos x)(-\sin x)$  1M+1A  
 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) - f'\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$  1M  
 $= f'(1)(0) - f'(0)(1)$   
 $= -2$  1A
10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(4x+1)(3x^2+1) - (2x^2+x-6)(6x)}{(3x^2+1)^2}$  1M+1A  
 $= \frac{-3x^2+40x+1}{(3x^2+1)^2}$  1A
11.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(-2)(3x-x^2-1) - (3-2x)(3-2x)}{(3x-x^2-1)^2}$  1M+1A  
 $= \frac{-2x^2+6x-7}{(3x-x^2-1)^2}$  1A
12. (a)  $f'(x) = \frac{6x^5}{81}$  1A  
 $\frac{a^6}{81} = \frac{2a^5}{27}$  1M  
 $a^5 \left( \frac{a}{81} - \frac{2}{27} \right) = 0$   
 $a = 0 \text{ 或 } 6$  1A
- (b)  $g'(x) = \frac{20x^4}{15} - 36x^2$   
 $= \frac{4x^4}{3} - 36x^2$  1A  
 $\frac{b^6}{81} = \frac{4b^4}{3} - 36b^2$  1M  
 $b^2 \left( \frac{b^4}{81} - \frac{4b^2}{3} + 36 \right) = 0$   
 $b^2 = 0 \text{ 或 } 54 \text{ 或 }$   
 $b = 0 \text{ 或 } \pm \sqrt{54}$  1A

13.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$  1M
- $$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$
- $$= \frac{1}{1 + \cos x}$$
- 1A
14.  $\frac{dy}{dx} = 2 \cot x \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)$  1M
- $$= 2 \cot x \left( \frac{-\sin x(\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} \right)$$
- 1A
- $$= -2 \cot x \csc^2 x$$
- 1A
15.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(5x^6 + 6)^{\frac{1}{2}} - (x^3 + 1) \left( \frac{1}{2} \right) (5x^6 + 6)^{-\frac{1}{2}} (30x^5)}{5x^6 + 6}$  1M
- $$= \frac{3x^2(5x^6 + 6) - 15x^5(x^3 + 1)}{(5x^6 + 6)^{\frac{3}{2}}}$$
- $$= \frac{-15x^5 + 18x^2}{(5x^6 + 6)^{\frac{3}{2}}}$$
- 1A
16.  $y = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 13)^{\frac{1}{2}}}$
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 + 3)(x^2 + 13)^{\frac{1}{2}} - (x^3 + 3x) \left( \frac{1}{2} \right) (x^2 + 13)^{-\frac{1}{2}} (2x)}{x^2 + 13}$$
- 1M
- $$= \frac{(3x^2 + 3)(x^2 + 13) - x(x^3 + 3x)}{(x^2 + 13)^{\frac{3}{2}}}$$
- $$= \frac{2x^4 + 39x^2 + 39}{(x^2 + 13)^{\frac{3}{2}}}$$
- 1A
17.  $y = \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}}$
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x + 5)(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - (2x^2 + 5x - 3) \left( \frac{1}{3} \right) (x^3 + 3x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 + 6x)}{(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$
- 1M
- $$= \frac{(4x + 5)(x^3 + 3x^2 + 1) - (2x^2 + 5x - 3)(x^2 + 2x)}{(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}$$
- $$= \frac{2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 10x + 5}{(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}$$
- 1A
18.  $\frac{dy}{dx} = 2(3x + \sqrt{18x^2 + 7}) \left( 3 + \frac{1}{2}(18x^2 + 7)^{-\frac{1}{2}}(36x) \right)$  1M
- $$= 2(3x + \sqrt{18x^2 + 7}) \left( 3 + \frac{18x}{\sqrt{18x^2 + 7}} \right)$$
- 1A
19.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( 2x + (x^2 + 9)^6 + \frac{4}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 2 + 6(x^2 + 9)^5(2x) - \frac{4}{x^2} \right)$  1M
- $$= \frac{1 + 6x(x^2 + 9)^5 - 2x^{-2}}{\sqrt{2x + (x^2 + 9)^6 + 4x^{-1}}}$$
- 1A