Dexter Wong & His Mathematics Team

暑期課程　2022 – 2023

數學　必修部分

S5 – S6 Core　功課　第 2 套

名字：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　電話：＿＿＿＿＿＿

學生編號：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　分校：＿＿＿＿＿＿

上課日：日 / 一 / 二 / 三 / 四 / 五 / 六

考生須知

1. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。
2. 除特別指明外，須詳細列出所有算式（多項選擇題除外）。
3. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
4. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

建議題解

派發於暑期課程
S5 – S6 Core
第 1 期 – 第 2 堂

1. $\boxed{\text{B}}$

由於 OA 為水平線，通過 B 的高線為 $x = 20$。
垂心 H 的坐標為 $(20,\ 4k - 5)$。
由於 $OH \perp AB$，

$$\frac{4k-5}{20} \times \frac{2k-0}{20-25} = -1$$

$$8k^2 - 10k - 100 = 0$$

所求之和 = 兩根之和 = $\dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

2. $\boxed{\text{D}}$

直線 $5x + 2y = 2b$ 通過 $B\,(0,\ b)$。
直線 $5x + 2y = 2b$ 的斜率為 $-\dfrac{5}{2}$，其傾角為 $112°$。
將直線 $5x + 2y = 2b$ 與 y 軸間的角記為 θ。可得 $\theta \approx 21.8°$。
$\angle OBA = 2\theta \approx 43.6°$ 及 $\tan(2\theta) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{20}{21}$。
故此，$a : b = 20 : 21$。

3. $\boxed{\text{B}}$

三角形的頂點的坐標為 $(0,\ 0)$、$(6,\ 0)$ 及 $(0,\ 8)$。
設內切圓的半徑為 r。
藉考慮三角形的面積，

$$\frac{(6)(8)}{2} = \frac{(6)(r)}{2} + \frac{(8)(r)}{2} + \frac{(\sqrt{6^2+8^2})(r)}{2}$$

$$r = 2$$

內心的坐標為 $(2,\ 2)$。

4. $\boxed{\text{B}}$

外心在 AC 的垂直平分線上，即 $x = \dfrac{2+(-4)}{2} = -1$。
設外心的坐標為 $(-1,\ k)$。

$$\sqrt{(-1-7)^2 + (k-5)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (k+6)^2}$$

$$k^2 - 10k + 89 = k^2 + 12k + 45$$

$$k = 2$$

5. $\boxed{\text{D}}$

$OE = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ 及 $EF = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

設內切圓的半徑為 r。考慮 $\triangle OEF$ 的面積，

$$\frac{(28-0)(15)}{2} = \frac{17r}{2} + \frac{25r}{2} + \frac{28r}{2}$$
$$r = 6$$

G 的 y 坐標為 6。設 G 的 x 坐標為 g。

$\tan \angle FOE = OE$ 的斜率 $\Rightarrow$ $\angle FOE = \tan^{-1} \dfrac{15}{8}$

OG 的斜率 $= \dfrac{6}{g} = \tan \dfrac{\angle FOE}{2}$

$= \dfrac{3}{5}$ *(利用計算機求得)*

$g = 10$

I. ✓。

II. ✓。

III. ✓。$m = \dfrac{6-0}{10-28} = -\dfrac{1}{3}$ 及 $n = \dfrac{15-0}{8-28} = -\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{2m}{1-m^2} = -\dfrac{3}{4} = n$

6. $\boxed{\text{C}}$

直線 $x - 2y + 10 = 0$ 垂直於直線 $2x + y + a = 0$。

三條線形成的三角形為直角三角形。垂心在直角頂點。

當 $x = -6$ 時，

$$(-6) - 2y + 10 = 0$$
$$y = 2$$

代 $(-6,\ 2)$ 至 $2x + y + a = 0$，

$$2(-6) + (2) + a = 0$$
$$a = 10$$

7. $\boxed{\text{D}}$

頂點的 x 坐標 $= \dfrac{-k}{2(1)} = -\dfrac{k}{2}$

PR 的中點 $= \left(-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$

考慮形心的 x 坐標，

$$-2 = \frac{0(1) + \left(-\frac{k}{2}\right)(2)}{1+2}$$
$$k = 6$$

8. $\boxed{\text{B}}$

$\triangle OAB$ 為直角三角形。故此，$\triangle OAB$ 的垂心在 O。

$\triangle OAB$ 的面積 $= \frac{1}{2}(12)(16) = 96$

$AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$。設所求距離為 d。藉考慮 $\triangle OAB$ 的面積，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(AB)(d) &= 96 \\ d &= 9.6\end{aligned}$$

9. $\boxed{\text{B}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{(-4+9)^2 + (2+2)^2} &= \sqrt{(-4-0)^2 + (k-2)^2} \\ (k-2)^2 &= 25 \\ k &= -3 \quad \text{或} \quad 7\end{aligned}$$

10. $\boxed{\text{B}}$

$OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = OA$

由於 $\triangle OAB$ 為等腰三角形，AB 的垂直平分線通過外心及 O。

AB 的斜率 $= \frac{4-0}{3+5} = \frac{1}{2}$，垂直平分線的斜率 $= -2$。

$$\begin{aligned}-2 &= \frac{k-0}{h-0} \\ h &= -\frac{k}{2}\end{aligned}$$

11. $\boxed{\text{B}}$

通過 P 的高線為 x 軸。

垂心 H 的坐標為 $(6, 0)$。

設 R 的坐標為 $(0, r)$。由於 $RH \perp PQ$，

$$\begin{aligned}\frac{0-r}{6-0} \times \frac{-3}{4} &= -1 \\ r &= -8\end{aligned}$$

R 的坐標為 $(0, -8)$。

12. $\boxed{\text{D}}$

外心的 y 坐標 $= \frac{(-2)+(8)}{2} = 3$

設外心的坐標為 $(h, 3)$。

$$\begin{aligned}\sqrt{(h-2)^2 + (3-8)^2} &= \sqrt{(h-10)^2 + (14-3)^2} \\ h^2 - 4h + 29 &= h^2 - 20h + 221 \\ 16h &= 192 \\ h &= 12\end{aligned}$$

外心的 x 坐標為 12。

13. $\boxed{\text{A}}$

由於 AB 平行於 y 軸，通過 O 的高線平行於 x 軸。
設垂心 H 的坐標為 $(x,\ 0)$。由於 $AH \perp OB$，

$$\frac{12-0}{16-x} \times \frac{-12-0}{16-0} = -1$$
$$x = 7$$

14. $\boxed{\text{D}}$

留意通過 B 的高線為水平。
垂心的 y 坐標為 0。
設垂心的坐標為 $(h,\ 0)$。
由於 $CH \perp AB$，

$$\frac{6-0}{0-h} \times \frac{0+2}{2-0} = -1$$
$$h = 6$$

垂心的 x 坐標為 6。

15. $\boxed{\text{A}}$

設內切圓的半徑為 r。

$$\frac{(9)(12)}{2} = \frac{9r}{2} + \frac{12r}{2} + \frac{\sqrt{9^2+12^2}\,r}{2}$$
$$r = 3$$

所求坐標為 $(3,\ 3)$。

16. $\boxed{\text{C}}$

將 $\triangle OAB$ 的內心記為 I。
AI 的斜率 $= \dfrac{1-0}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$
$-\tan\angle OAI = -\dfrac{1}{2}$
$\angle OAI = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$
$\tan\angle OAB = \tan(2\angle OAI) = \dfrac{4}{3}$ （利用計算機）
$\dfrac{OB}{OA} = \tan\angle OAB$
$\dfrac{OB}{3} = \dfrac{4}{3}$
$OB = 4$
所求 y 坐標為 4。

17. $\boxed{\text{C}}$

設圓心為 O。

BO 為 $\triangle ABC$ 的中線。故此，BEO 為一直線。

$\angle BAC = \angle ABE = 27°$

$\angle CBD = \angle BAC = 27°$

$\angle ABC = 90°$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$x + 27° + (90° + 27°) = 180°$$
$$x = 36°$$

18. $\boxed{\text{D}}$

設 $H\,(h,\ k)$ 為垂心。

$AH \perp BC$ 及 $BH \perp AC$

$$\frac{k+19}{h+38} \times \frac{9+1}{-10+2} = -1 \qquad \frac{k-9}{h+10} \times \frac{-1+19}{-2+38} = -1$$
$$\frac{k+19}{h+38} = \frac{4}{5} \qquad \frac{k-9}{h+10} = -2$$

求解後，可得 $h = -8$ 及 $k = 5$。

19. $\boxed{\text{C}}$

RT 為 $\angle SRP$ 的角平分線。所以，$\angle SRP = 24°$。

$\angle QPS = \angle QSR$。

$$\angle QPS + (\angle QSR + 70°) + 24° = 180°$$
$$\angle QPS = 43°$$

20. $\boxed{\text{A}}$

$P\left(\frac{k}{2},\ 0\right)$、$Q\,(0,\ -k)$ 及 $R\,(0,\ k)$。

外心在 QR 的垂直平分線上，即 x 軸。

外心在 $(-3,\ 0)$。

$$\frac{k}{2} - (-3) = \sqrt{3^2 + k^2}$$
$$0 = \frac{3k^2}{4} - 3k$$
$$k = 4 \quad \text{或} \quad 0$$

R 的 y 坐標 $= 4$

21. (a) k 1A

(b) (i) 留意 $OH \perp PQ$。

$$\frac{k-0}{h-0} \times \frac{k-60}{96-0} = -1$$ 1M

$$k^2 - 60k + 96h = 0$$ 1

(ii) $h = -\frac{1}{96}k^2 + \frac{5}{8}k$

$= -\frac{1}{96}\left[k^2 - 2(30)k + (30)^2\right] + \frac{75}{8}$ 1M

$= -\frac{1}{96}(k-30)^2 + \frac{75}{8}$

所求之值為 $\frac{75}{8}$。 1A

<u>另一題解</u>

$\Delta = 60^2 - 4(1)(96h) \geq 0$ (1M)

$h \leq \frac{75}{8}$

所求之值為 $\frac{75}{8}$。 (1A)

22. (a) $a = \frac{(PQ)r}{2} + \frac{(QR)r}{2} + \frac{(PR)r}{2}$ 1M

$= \frac{r}{2}(PQ + QR + PR)$

$= \frac{pr}{2}$ 1

(b) $AB = \sqrt{(9-2)^2 + (18+6)^2} = 25$、$BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ 及 $AC = 39$。

設 $\triangle ABC$ 的內切圓的半徑為 r。

$$\frac{(41-2)(18+6)}{2} = \frac{(25+40+39)r}{2}$$ 1M

$$r = 9$$ 1A

所求 y 坐標 $= -6 + 9 = 3$ 1A

23. (a) $\angle OMQ = 90° = \angle ONQ$ （已知）

$AB = CD$ （已知）

$OM = ON$ （等弦對等角）

$OQ = OQ$ （公共邊）

$\triangle QNO \cong \triangle QMO$ （RHS）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) $OT = ON = 130$

$OQ = \sqrt{312^2 + 130^2} = 338$ 及 $OT : OQ = 130 : 338 = 5 : 13$

T 的 x 坐標 $= 312 \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -120$ 1M

T 的 y 坐標 $= -130 \times \left(-\frac{5}{13}\right) = 50$

T 的坐標為 $(-120, 50)$。 1A

設 R 的坐標為 $(h, -130)$ 使得 $QR \perp ON$。

$$\frac{-130-50}{h+120} \times \frac{50-0}{-120-0} = -1$$ 1M

$$h = -195$$

設 P 的坐標為 (a, b)。留意 T 為 PR 的中點。

$$\frac{a+(-195)}{2} = -120 \quad 及 \quad \frac{b+(-130)}{2} = 50$$ 1M

$$a = -45 \qquad\qquad b = 230$$

P 的坐標為 $(-45, 230)$。 1A

(ii) $OP = \sqrt{45^2 + 230^2} = \sqrt{54\,925} \neq OQ$ 1M

因此，O 不是 $\triangle PQR$ 的外心。

不同意該宣稱。 1A

24. (a) $PB = PD$ 及 $\angle PBD = \frac{180° - x}{2} = 90° - \frac{x}{2}$ 1M

$\angle BAD = \angle PBD = 90° - \frac{x}{2}$ 1A

$\angle ABC = 90°$

$\angle AQB = 180° - 90° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ 1A

(b) (i) 由於 $PB = PD = PR$，可得 $\angle BRD = \angle PDR$。 1M

$$\angle BRD + \angle PDR = x$$

$$\angle BRD = \frac{x}{2}$$ 1A

(ii) 留意 $\angle BRD = \angle BQD = \frac{x}{2}$。

B、D、Q、R 共圓。 1M

由於 $PB = PD = PR$，P 為圓 BDR 的圓心，即圓 $BDQR$ 的圓心。

因此，P 為 $\triangle BDQ$ 的外接圓的圓心。

同意該宣稱。 1A

25. (a) $CE \perp AB$ （垂心性質）

$BD \perp AC$ （垂心性質）

$\angle BEC = \angle BDC = 90°$

因此，$BCDE$ 為圓內接四邊形。 （同弓形內的圓周角的逆定理）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	2
情況 2	未附有正確理由的任何正確證明。	1

(b) (i) 圓心的坐標 $= \left(\dfrac{-6+14}{2},\ \dfrac{-6-6}{2}\right) = (4,\ -6)$ 1A

圓的方程為

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = (0-4)^2 + (8+6)^2$$ 1M

$$(x-4)^2 + (y+6)^2 = 100$$ 1A

(ii) A 與圓心的距離 $= \sqrt{4^2 + (-6-8)^2} = \sqrt{212}$

圓的半徑 $= 10$

兩切線之間的角 $= 2 \times \tan^{-1}\dfrac{10}{\sqrt{212}} \approx 86.8° \neq 90°$ 1M+1A

不同意該宣稱。 1A

26. (a) AD 為 BC 的垂直平分線。D 的坐標為 $(-8,\ -6)$。 1A

由於 D 為 BC 的中點，C 的坐標為 $(-8,\ -16)$。 1A

AC 的中點 $= (1,\ -11)$，AC 的斜率 $= \dfrac{-6+16}{10+8} = \dfrac{5}{9}$ 1A

所求方程為

$$y + 11 = -\frac{9}{5}(x-1)$$ 1M

$$9x + 5y + 46 = 0$$ 1A

(b) 由於 AD 為 BC 的垂直平分線，外心的 y 坐標 $= -6$。 1M

代 $y = -6$ 至 $9x + 5y + 46 = 0$，可得 $x = -\dfrac{16}{9}$。

所求坐標為 $\left(-\dfrac{16}{9},\ -6\right)$。 1A

(c) 所求方程為

$$\left(x + \frac{16}{9}\right)^2 + (y+6)^2 = \left(10 + \frac{16}{9}\right)^2 + (-6+6)^2$$ 1M

$$\left(x + \frac{16}{9}\right)^2 + (y+6)^2 = \frac{11\,236}{81}$$ 1A

(d) (i) P 的軌跡為拋物線（開口向上）。 1A

(ii) 設 P 的坐標為 $(x,\ y)$。

$$\sqrt{(x-10)^2 + (y+6)^2} = \sqrt{(x+8)^2}$$ 1M

$$y^2 - 36x + 12y + 72 = 0$$

所求方程為 $y^2 - 36x + 12y + 72 = 0$。 1A

27. (a) 設 $x = \angle BAI$ 及 $y = \angle ABI$。

$\angle PAC = \angle BAI = x$ （內心性質）

$PB = PC$ （等角對等弦）

$\angle PIB = \angle ABI + \angle BAI$ （△ 外角）

$= x + y$

$\angle IBC = \angle ABI = y$ （內心性質）

$\angle PBC = \angle PAC = x$ （同弓形內的圓周角）

$\angle IBP = x + y$

$= \angle PIB$

$PB = PI$ （等角對等邊）

因此，$PB = PI = PC$。

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(b) $\angle IAY = \angle PSC$ （同弓形內的圓周角）

$\angle AYI = 90°$ （已知）

$\angle SCP = 90°$ （半圓上的圓周角）

$= \angle AYI$

$\triangle IAY \sim \triangle PSC$ （AA）

評分標準		
情況 1	附有正確理由的任何正確證明。	3
情況 2	未附有理由的任何正確證明。	2
情況 3	附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1

(c) $\dfrac{IY}{PC} = \dfrac{IA}{PS}$ 1M

$\dfrac{r}{IP} = \dfrac{AI}{2R}$

$AI \cdot IP = 2Rr$

同意該宣稱。 1A

(d) 設圓 BPC 的方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$，其中 D、E 及 F 均為常數。

$$\begin{cases} (-16)^2 - 16D + F = 0 \\ (-8)^2 - 8E + F = 0 \\ 16^2 + 16D + F = 0 \end{cases}$$ 1M

求解後，可得 $D = 0$、$E = -24$ 及 $F = -256$。

外接圓的半徑 $= \sqrt{0^2 + 12^2 + 256} = 20$ 1A

$BP = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$ 1A

據 (c)，$AI = \dfrac{2Rr}{IP} = \dfrac{2(20)(9)}{8\sqrt{5}} = 9\sqrt{5}$ 1A